

Referate.

Algebra, Gruppen- und Zahlentheorie.

Takagi, Teiji: Zur Theorie der natürlichen Zahlen. (*Math. Inst., Kais. Univ. Tokyo.*) Proc. imp. Acad. (Tokyo) 7, 29—30 (1931).

Verf. gibt im Anschluß an das Landausche Buch „Grundlagen der Analysis“ den Kalmárschen Beweis für die Existenz der Summe zweier natürlicher Zahlen unter Annahme der bekannten fünf Peanoschen Axiome und bemerkt, daß die Eindeutigkeit dieser Summendefinition leicht nach Peano gefolgt werden kann. Aus der Eindeutigkeit beweist Verf. dann das Assoziativ- und Kommutativgesetz der Addition, ohne hierbei das Induktionsaxiom zu benutzen. *Heilbronn* (Göttingen).

Murnaghan, Francis D.: A simple derivation of Waring's formulae. Amer. math. Monthly 38, 219—222 (1931).

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung n -ten Grades. Man kann sie offenbar als die charakteristischen Wurzeln einer Matrix A ansehen. $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p$ sind dann die charakteristischen Wurzeln von A^p . Die Spur von A^p , die eine Form p -ten Grades in den Elementen von A ist, ist demnach die p -te Potenzsumme der $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Die r -te elementarsymmetrische Funktion von $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ist aber bis auf das Vorzeichen die Summe der Hauptunterdeterminanten r -ten Grades von A . Aus dieser Darstellung und der der Spuren von A^p folgert der Verf. durch eine elementare Abzählung die Waringsche Formel, die die elementarsymmetrischen Funktionen durch die Potenzsummen ausdrückt. *U. Wegner* (Göttingen).

MacDuffee, C. C.: The discriminant matrices of a linear associative algebra. Ann. of Math., II. s. 32, 60—66 (1931).

Als ein Analogon der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & \dots & s_{2n-2} \end{pmatrix},$$

wobei s_k die k -ten Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung n -ten Grades mit reellen Koeffizienten sind, kann offenbar in einer linearen assoziativen Algebra \mathfrak{A} über einem Felde die Matrix $\left(\sum_{ij} C_{rsi} C_{ijj} \right)$ angesehen werden, wobei die C_{rsi}

die Multiplikationskonstanten bezeichnen. Sind e_1, e_2, \dots, e_n die Basiszahlen der Algebra und $t_1(x)$ bzw. $t_2(x)$ die Spuren der Matrizen $R(x)$ bzw. $S(x)$, wobei

$$S(x) = \sum_{i=1}^n x_i S_i = \sum_{i=1}^n x_i (C_{ris})$$

und

$$R(x) = \sum_{i=1}^n x_i R_i = \sum_{i=1}^n x_i (C_{isr})$$

für eine Zahl

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

ist, so ordnet der Verf. n Zahlen z_1, z_2, \dots, z_n aus der Algebra die Matrizen

$$T_1(z_1, z_2, \dots, z_n) = [t_1(z_r \cdot z_s)] \quad \text{und} \quad T_2(z_1, z_2, \dots, z_n) = [t_2(z_r \cdot z_s)]$$

zu, von denen er zeigt, daß T_1 mit der Matrix $\left(\sum C_{rsi} \cdot C_{ijj} \right)$ identisch ist. Ist \mathfrak{A} das Algebraische Feld $F(\Theta)$, so wird $T_1 = T_2 = M$. Mittels der Matrizen T_1 und T_2

gelingt es dem Verf. die bekannte Zerlegung einer Algebra als Summe einer nilpotenten und einer halbeinfachen Algebra etwas einfacher durchzuführen. *Wegner.*

Ward, Morgan: The algebra of recurring series. *Ann. of Math.*, II. s. 32, 1–9 (1931).

Es handelt sich um die Aufstellung formaler Relationen zwischen den im Körper \mathfrak{K} gelegenen Lösungen einer linearen Differenzgleichung 3. Ordnung

$$\Omega_{n+3} = P \Omega_{n+2} - Q \Omega_{n+1} + R \Omega_n$$

mit Koeffizienten P, Q, R aus \mathfrak{K} bei irreduziblem $f(x) = x^3 - P x^2 + Q x - R$. Die Untersuchung der Lösungen dieser skalaren Differenzgleichung 3. Ordnung wird zunächst ersetzt durch die einer Matrix-Differenzgleichung 1. Ordnung in Matrizen 3. Grades. Ferner konstruiert man einen Isomorphismus zwischen einem Unterring \mathfrak{U} des vollen Ringes der Matrizen 3. Grades in \mathfrak{K} und dem durch eine Nullstelle α von $f(x)$ erzeugten Körper $\mathfrak{K}(\alpha)$, und es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine Matrixfolge, die eine Lösung der Matrix-Differenzgleichung darstellt, ganz in \mathfrak{U} liegt. Einfachste Relationen in $\mathfrak{K}(\alpha)$ liefern dann beim Übergang nach \mathfrak{U} solche für die Matrizen aus \mathfrak{U} und damit Relationen für gewisse Lösungen der Ausgangs-Differenzgleichungen. Die Resultate sind auf Differenzgleichungen höherer Ordnung ausdehnbar. *Grell (Jena).*

Geronimus, J.: On some persymmetric determinants formed by the polynomials of **M. Appell**. *J. Lond. math. Soc.* 6, 55–59 (1931).

On appelle un déterminant persymétrique si ses éléments a_{ik} sont de la forme c_{i+k} . Une suite des polynomes d'Appell $P_n(z)$ est définie par les relations

$$P_0(z) = \text{const.}, \quad P'_m(z) = (-1)^m m P_{m-1}(z) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Soit

$$D_n(z) = \begin{vmatrix} A_0 & A_1(z) & \dots & A_n(z) \\ A_1(z) & A_2(z) & \dots & A_{n+1}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n(z) & A_{n+1}(z) & \dots & A_{2n}(z) \end{vmatrix}$$

le déterminant persymétrique formé par les polynomes d'Appell

$$A_m(z) = \int_a^b p(x) (x-z)^m dz.$$

En déterminant de deux manières différentes le polynome $y(x)$ de degré n , dont la dérivée d'ordre k en un point a a une valeur assignée, sous la condition de minimiser

l'intégrale $\int_a^b p(x) y^2(x) dx$, on obtient la formule

$$\frac{D_n^{(i,k)}(z)}{D_n(z)} = \frac{1}{i! k!} \sum_{r=0}^n \varphi_r^{(i)}(z) \varphi_r^{(k)}(z) \quad (x)$$

où $D_n^{(i,k)}(z)$ ($i, k = 0, 1, \dots, n$) sont les compléments algébriques du déterminant $D_n(z)$, et $\varphi_n(z)$ les polynomes orthogonaux de degré n ($n = 0, 1, \dots$) associés au poids $p(x)$ et définis par les relations

$$\int_a^b p(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k). \end{cases}$$

En posant, dans la formule (x), $i = k = n$, on trouve la valeur du déterminant $D_n(z)$:

$$D_n(z) = (d_0 d_1 d_2 \dots d_n)^{-2},$$

où d_m est le coefficient de z^m dans le polynome $\varphi_m(z)$. En posant, dans la même formule, $i = 0, k = n$, on obtient une expression des polynomes $\varphi_n(z)$ et aussi des polynomes

$$\psi_{n-1}(z) = \int_a^b p(x) \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(x)}{z - x} dx$$

(dénominateurs et nominateurs des réduites de la fraction continue $\int_a^b \frac{p(x) dx}{z-x}$) sous la forme des déterminants persymétriques.

W. Gontcharow (Charkow).

Franklin, Philip: Two functional equations with integral arguments. (*Massachusetts Inst. of Techn., Cambridge [U.S.A.]*.) Amer. math. Monthly 38, 154–157 (1931).

Die beiden Gleichungen [die von E. T. Bell, vgl. dies. Z. 37, 484 (1930), aufgestellt worden sind] heißen

$$f(x, n_1) f(x, n_2) = f(x, n_1 + n_2 + c) \quad (1)$$

$$\text{und} \quad f(x, n_1) f(x, n_2) = f(x, cn_1 n_2). \quad (2)$$

Hierin sind n und c ganze nichtnegative Zahlen, x ein beliebiger Parameter. Die Gleichungen hängen mit der Frage nach den möglichen Typen arithmetischer Systeme zusammen. Die Lösung der Gleichung (1) lautet $[F(x)]^{n+c}$, worin F eine willkürliche Funktion bedeutet. Die Lösung der Gleichung (2) [die, wenn die Erschwerung durch die Ganzzahligkeit nicht wäre, einfach durch eine logarithmische Transformation aus (1) herzuleiten wäre] ist recht umständlich und nicht gut kurz wiederzugeben; sie enthält eine abzählbare Menge willkürlicher Funktionen. Einen wesentlichen Punkt bildet dabei auch die Unterscheidung, ob $f=0$ ist oder nicht. *Schrutka* (Wien).

Bell, E. T.: Modular interpolation. (*California Inst. of Technol., Pasadena*.) Bull. amer. math. Soc. 37, 65–68 (1931).

Der Verf. behandelt folgende Frage: Gegeben sind eine ganze Zahl $m > 0$ und s verschiedene ganze Zahlen r_1, \dots, r_s , wobei $0 \leq r_i < m$ ($i=1, \dots, s$, $s \leq m$). Es soll nun eine stetige Funktion $f(x)$ angegeben werden, welche für $x=r_i$ ($i=1, \dots, s$) gegebene Werte k_1, \dots, k_s annimmt und überdies die Periode m hat. Die Aufgabe wird mit Hilfe der Theorie der Einheitswurzeln gelöst. Es ergibt sich:

$$f(x) = 1/r \sum_{i=0}^{s-1} R_i(\varrho) \cdot y^i.$$

Hierbei bedeutet r eine ganze Zahl, die als bestimmte symmetrische Funktion der primitiven Einheitswurzeln m ten Grades gefunden wird, $\varrho = e^{2\pi i/m}$, $y = \varrho^x$ und die R_i sind bestimmte Polynome von ϱ , deren Koeffizienten lineare Funktionen der k_i mit ganzen rationalen Koeffizienten sind. Der Grad dieser Polynome kann dabei unter $\varphi(m)$ — φ ist die Eulersche Funktion — herabgedrückt werden. — Verf. behandelt das Beispiel $m=8$, $s=4$, $(r_1, \dots, r_4) = (1, 3, 5, 7)$ und $(k_1, \dots, k_4) = (1, -1, -1, 1)$ und findet

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \varrho (\varrho^2 - 1) \cdot \varrho^x (\varrho^{2x} - 1)$$

oder in trigon. Form:

$$f(x) = -2 i^{x+1} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} x.$$

Zum Schluß behandelt der Verf. noch den besonderen Fall, in dem die Zahlen (r_1, \dots, r_s) genau die Zahlen $\leq m$ sind, die zu m teilerfremd sind, also $s=\varphi(m)$. In diesem Fall ist die Aufstellung von $f(x)$ etwas einfacher. *Neß* (Kiel).

Wilson, R.: Quadratic equations in a cyclic number system. Proc. Edinb. math. Soc., II. s. 2, 151–157 (1931).

Die Zahlen eines zyklischen Zahlensystems haben die Form

$$x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_{n-1} e_{n-1},$$

dabei gelten die Multiplikationsregeln $e_r e_s = e_{r+s}$, $r+s$ nach dem Modul n genommen, $e_0 = 1$. Teiler der Null sind die Zahlen, für die die Summe aller Koeffizienten 0 ist (Nullteiler erster Art), und die, für die alle Koeffizienten gleich sind (Nullteiler zweiter Art). Eine quadratische Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$ hat, wenn a kein Nullteiler ist, im allgemeinen 2^n Lösungen, wenn aber die Diskriminante 0 ist, nur eine, wenn endlich c ein Nullteiler ist, so kann x ein Nullteiler derselben Art sein, und es gibt noch 2^{n-1} oder 2 weitere Lösungen, je nachdem dies die erste oder die zweite Art ist. Ist a ein Nullteiler, so gibt es 2^{n-1} oder 2 Lösungen, je nachdem es von der ersten

oder zweiten Art ist. Sind a, b Nullteiler derselben Art, so gibt es keine Lösungen, außer wenn c Nullteiler derselben Art ist. Sind a, b, c Nullteiler erster Art, so enthalten die 2^{n-1} Lösungen jede eine willkürliche Konstante, sind sie Nullteiler zweiter Art, so enthält jede der zwei Lösungen $n-1$ willkürliche Konstanten. Läßt man für die Koeffizienten x auch komplexe Werte zu, so vereinfachen sich die Verhältnisse. Die Überlegungen werden an dem Fall $n=3$ durchgeführt und dieser noch geometrisch gedeutet. Schrutka (Wien).

Klein, F.: Zur Theorie der Systeme von Potenzproduktkongruenzen. J. f. Math. 164, 141—150 (1931).

Diese Arbeit behandelt einen Spezialfall von allgemeineren Untersuchungen über Polynomkongruenzen, die Verf. im J. f. Math. 159, 29—35 (1928) durchgeführt hat und die er nach anderer Richtung im J. f. Math. 159, 238—245 weitergeführt hat. Hier handelt es sich um die Auflösung eines Systems

$$\prod_{k=1}^r x_k^{e_{ik}} \equiv a_i \pmod{m}, \quad (e_{ik} \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, s) \quad (1)$$

und zwar sollen alle x_k „totale“ h -te Nichtreste mod m , d. h. h -te Nichtreste in bezug auf jeden Faktor $p_v^{\delta_v}$ der kanonischen Zerlegung $m = \prod_{v=1}^{\lambda} p_v^{\delta_v}$ sein. Dabei ist $h > 0$ eine fest gegebene, zu m teilerfremde Zahl. In § 1 wird dieses Problem zurückgeführt auf den Fall, daß m eine Primzahl p ist. In § 2 wird die Lösungszahl $\psi(p)$ von

$$\prod_{k=1}^r x_k^{e_{ik}} \equiv a_i \pmod{p} \quad (1')$$

ermittelt zu

$$\psi(p) = \sum_{\gamma=0}^{r-s} (-1)^{\gamma} \binom{r}{\gamma} (p-1)^{r-s-\gamma} \left(\frac{p-1}{(h, p-1)} \right)^{\gamma} - \sum_{\beta=r-s+1}^r \left\{ D(\beta) \sum_{\alpha=0}^{r-s} (-1)^{\alpha} \binom{\beta}{\alpha} \right\}. \quad (2)$$

Hierbei bedeutet $D(\beta)$ die Anzahl derjenigen Lösungen von (1'), bei denen es unter den r Zahlen x_k genau β gibt, die h -te Reste mod p sind. Für die Ermittlung von $D(\beta)$ wird ein Verfahren angegeben. Der letzte Abschnitt von § 2 zeigt, wie das Problem auf die „kanonische“ Form reduziert werden kann,

$$y_i \prod_{l=1}^{r-s} y_{s+l}^{\eta_{il}} \equiv b_i \pmod{p}$$

aufzulösen, wobei $\eta_{il} \equiv 1 \pmod{p-1}$ für $i=1$ oder $l=1$, sonst $\eta_{il} \equiv 1 \pmod{p-1}$ ist, und wo die Matrix (η_{il}) „vollständig prim“ mod $p-1$ ist; d. h. alle Determinanten, die sich aus dieser Matrix bilden lassen, sind zu $p-1$ teilerfremd. Der § 3 bringt einige interessante Sonderfälle und Zahlenbeispiele. G. Wiarda (Dresden).

Florescu, Ioan B.: Über die ganzzahligen Lösungen der Gleichung $Ax^2 + By^2 = Cz^2$. Gaz. mat. 36, 248—253 (1931) [Rumänisch].

Der Verf. behandelt vorerst die Gleichung (1) $Ax^2 + By^2 = Cz^2$, wo $C = A + B$, und erhält für die ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung, worin $A=p$, $B=q$, $C=p+q$, die Ausdrücke $x = \pm \beta/\alpha (2qm + n - r)$, $y = \pm \beta/\alpha (2pm + r - n)$, $z = \pm \beta/\alpha (r + n)$, wo β und m zwei beliebige ganze Zahlen, n und r zwei durch die Relation $n \cdot r = p \cdot q \cdot m^2$ verbundene ganze Zahlen und α den größten gemeinschaftlichen Teiler der Zahlen $(2q \cdot m + n - r)$, $(2p \cdot m + r - n)$ und $(r + n)$ bezeichnen. Verf. betrachtet alsdann die Gleichung $Ax^2 + By^2 = Cz^2$, unter der Voraussetzung, daß eine Lösung x_1, y_1, z_1 derselben bekannt sei. Die neue Lösung $(x_1 y_1 z_1 x)$, $(x_1 y_1 z_1 y)$, $(x_1 y_1 z_1 z)$ einführend, erhält Verf. eine Gleichung von der Form (1), mit der allgemeinen Lösung

$$x = \pm \frac{\beta}{\alpha} [2B y_1 m + (n - r) x_1], \quad y = \pm \frac{\beta}{\alpha} [2A x_1 m + (r - n) y_1], \\ z = \pm \frac{\beta}{\alpha} (r + n) z_1,$$

worin m und β zwei beliebige ganze Zahlen, r und n zwei aus der Zerlegung $r \cdot n = A \cdot B \cdot m^2$ stammende ganze Zahlen und α den größten gemeinschaftlichen Teiler der Zahlen $[2B y_1 m + (n - r) x_1]$, $[2A x_1 m + (r - n) y_1]$ und $[(r + n) z_1]$ bezeichnen.

N. Abramescu (Cluj).

Caris, Perry A.: Integral solutions of $ax^3 + by^3 = az^3 + bt^3$. Amer. math. Monthly 38, 202—204 (1931).

Was der Verf. beweist, aber nicht mit genügender Deutlichkeit ausspricht, ist folgendes: Sind a, b von Null verschiedene ganze Zahlen, so werden sämtliche rationalen Lösungen von $ax^3 + by^3 = az^3 + bt^3$, für die sowohl $x \neq z$ als auch $xy \neq tz$ ist — diejenigen mit $x = z$ oder $xy = tz$ sind trivial —, durch die Formeln

$$x = \lambda(bqr + 3bqs - ap^2)$$

$$y = \lambda(bq^2 - 3aps - apr)$$

$$z = \lambda(bqr - 3bqs - ap^2)$$

$$t = \lambda(bq^2 + 3aps - apr)$$

geliefert, wo p und q teilerfremde positive ganze Zahlen sind, während λ, r, s , rationale Zahlen sind, die mit p, q durch die Gleichung $pq = r^2 + 3s^2$ verknüpft sind.

Bessel-Hagen (Bonn).

Burnett, J. C.: Enumeration of magic squares of the 5th order. Nature (Lond.) 1931 I, 443.

The author gives, without proof, the number of magic squares of the 5th order, constructed by 'bordering' a 'heart'-square of the 3rd order in different positions and for all possible proportions of the sum in a row and column of the 'heart'-square to the rest of the row or column.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

DellaCasa, Luciano: Sui quadrati magici. Boll. Mat. 27, 3—11 (1931).

On indique les colonnes d'un carré magique de gauche à droite par les nombres $0, 1, 2, \dots, m-1$; les lignes de haut en bas par les mêmes nombres; la case située dans la colonne x et dans la ligne y par (x, y) . Si a, b, c, a', b', c' sont des nombres de la suite $0, 1, 2, \dots, m-1$, de sorte que $a, b, a', b', ab' - a'b$ sont premiers avec m et si l'on met le nombre $z = [(ax + by + c)Rm]m + (a'x + b'y + c')Rm + 1$ dans la case (x, y) l'auteur démontre qu'on aura un carré semimagique de m^2 cases. ARm signifie le résidu de la division de A par m . Ensuite il démontre: Si de plus $a + b, a - b, a' + b', a' - b'$ sont premiers avec m , le carré est pandiagonal (diabolique). Puis il traite le problème de déterminer la case (x, y) dans laquelle le nombre donné z doit être mis. Cas spéciaux $m = 5, 7$. *N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).*

Hill, Lester S.: Concerning certain linear transformation apparatus of cryptography. Amer. math. Monthly 38, 135—154 (1931).

Fortsetzung von Cryptography in an algebraic alphabet [Amer. math. Monthly 36, 306—312 (1929)]. Es werden lineare Transformationen

$$y_i = \sum_{k=1}^{k=f} a_{ik} x_k + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (1)$$

untersucht, bei denen x_i, y_i, a_{ik} und a_i n -zeilige quadratische Matrices mit Elementen aus einem Körper bzw. Ring mit Einselement (scale) sind. Für die Zwecke einer Geheimschrift kommt vorzugsweise der Ring $S(26)$ des vollständigen Restklassensystems mod. 26 in Betracht, wobei jeder Restklasse ein Buchstabe des (englischen) Alphabets zugeordnet wird. Das Chiffrieren eines Textes erfolgt in der Weise, daß je $n^2 f$ Buchstaben auf f n -zeilige Matrices verteilt, durch die entsprechenden Restklassen ersetzt und einer Transformation der Form (1) unterworfen werden. Ersetzt man die Restklassen der transformierten Matrices wieder durch die zugeordneten Buchstaben, so erhält man den chiffrierten Text. Das Dechiffrieren erfolgt ebenso mit Hilfe der inversen Transformation.

K. Pingitzer (Wien).

Williamson, J.: A prepared system for two quadratics in six variables. Amer. J. Math. 53, 343—357 (1931).

Aufstellung einer Liste von 115 symbolischen Faktoren, aus denen sich die Invarianten des Systems von zwei quadratischen Formen in sechs Veränderlichen zusammensetzen lassen. *E. A. Weiss* (Bonn).

Mordell, L. J.: The arithmetically reduced indefinite quadratic form in n -variables. Proc. roy. Soc. Lond. A 131, 99—108 (1931).

Nach einem allgemeinen von Hermite ausgesprochenen und von Stouff bewiesenen Satz gibt es nur eine endliche Anzahl reduzierter ganzzahliger quadratischer Formen von gegebener Determinante und demnach nur endlich viele Klassen von arithmetisch äquivalenten Formen. Der Verf. zeigt in der vorliegenden Arbeit, wie der ziemlich komplizierte Beweis von Stouff vereinfacht werden kann, wenn es sich um Formen handelt, welche Null repräsentieren können. *P. J. Myrberg* (Helsinki).

Weitzenböck, R.: Über Translations-Invarianten. Proc. roy. Acad. Amsterd. 34, 214—216 (1931).

Eine Angabe des Verf. (Math. Enzyklopädie 3, E, 1, Nr. 16) die Typen von Translationsinvarianten beliebig vieler Punkte und R_{n-1} im R_n betreffend, wird durch Neuaufstellung eines vollständigen Systems dieser Typen verbessert. *E. A. Weiss* (Bonn).

Lalan, V.: Sur les dérivées covariantes des tenseurs. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 264—266 (1931).

Ist $\varepsilon^{v_1 \dots v_n} = \varepsilon_{v_1 \dots v_n}$ das bekannte Riccische Symbol und g die Determinante des Fundamentaltensors, so kann man folgende Zuordnung den p -Vektoren und $(n-p)$ -Vektoren konstruieren

$$w_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-p}} = \frac{n!}{(n-p)!} \sqrt{g} \varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_n} v^{\lambda_{n-p+1} \dots \lambda_n}$$

$$\sqrt{g} v^{v_1 \dots v_p} = (-1)^{p(n-p)} \frac{n!}{p!} \varepsilon^{v_1 \dots v_p} w_{v_{p+1} \dots v_n}.$$

Die kovariante Ableitung (in bezug auf den Fundamentaltensor) mit gleichzeitiger Faltung ergibt

$$D^\alpha w_{\alpha \lambda_1 \dots \lambda_{n-p}} = \frac{n!}{(n-p)!} \sqrt{g} \varepsilon_{\alpha \lambda_1 \dots \lambda_n} D^\alpha v^{\lambda_{n-p+1} \dots \lambda_n}$$

$$\sqrt{g} D_\alpha v^{\alpha v_1 \dots v_p} = (-1)^{p(n-p)} \frac{n!}{p!} \varepsilon^{\alpha v_1 \dots v_p} D_\alpha w_{v_{p+1} \dots v_n}.$$

Der Autor beweist diese Formeln, indem er das Riccische Symbol nicht gebraucht und die rechte Seite ausschreibt. *Hlavatý* (Praha).

Hasse, Helmut: Über p -adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlssysteme. Math. Annalen 104, 495—534 (1931).

Es werden die von Speiser, Brandt und Artin gewonnenen Resultate über die Arithmetik hyperkomplexer Systeme mit den Hilfsmitteln der p -adik abgeleitet. Ist A ein einfaches System mit einem algebraischen Zahlkörper K als Zentrum, so werden neben A die Systeme A_p betrachtet, die durch Erweiterung von K zu K_p entstehen, K_p die zu einem Primideal p aus K gehörige p -adische Erweiterung von K . A_p ist Matrizenring in einem Schiefkörper S mit dem Zentrum K_p .

Die Theorie dieser Schiefkörper S ist nun von überraschender Einfachheit. Aus der Tatsache, daß sie nur eine einzige Maximalordnung besitzen mit einem einzigen zweiseitigen Primideal, das Hauptideal ist (einseitige Ideale fehlen überhaupt), ergibt sich, daß es über K_p als Zentrum nur $\varphi(n)$ verschiedene Schiefkörper S vom Grad n gibt. S läßt sich in der Form $S = K_p(\omega, \pi)$ durch 2 Elemente ω, π mit den Relationen $g_n(\omega) = 0$, $\pi^n = p$, $\pi \omega \pi^{-1} = \omega^r$ erzeugen. Dabei bezeichnet q die Restklassenanzahl nach dem Primideal p von K_p , $g_n(x)$ ist ein beliebiger in K_p irreduzibler Teiler n ten Grades von x^{n-1} , p ein beliebiges Primelement zu p und r ein zu n primier Exponent. Durchläuft r alle $\varphi(n)$ Restklassen nach n , so bekommen wir die verschiedenen Schiefkörper.

Die Arithmetik der Matrizenringe A_p über den Schiefkörpern S ist gleichfalls von einfachster Art: Alle Maximalordnungen entstehen aus einer, \mathfrak{o} , durch Transformation mit Elementen aus A_p , \mathfrak{o} besteht aus allen Matrizen mit Elementen aus der Maximalordnung von S . Es gibt wiederum in jeder Maximalordnung nur ein zweiseitiges Primideal, das Hauptideal ist. Auch die einseitigen Ideale sind Hauptideale. Zwei beliebige einseitige unzerlegbare Ideale sind durch Elemente aus A_p ineinander transformierbar. Das Gruppoid aller Ideale aus A_p wird dadurch leicht übersehbar.

Die Arithmetik eines einfachen Systems A mit einem algebraischen Zahlkörper als Zentrum wird nun abgeleitet durch Übergang zu allen A_p : Jeder Maximalordnung \mathfrak{o} von A entspricht eine Maximalordnung \mathfrak{o}_p von A_p , jedem Ideal \mathfrak{a} in \mathfrak{o} ein Ideal \mathfrak{a}_p in \mathfrak{o}_p , die „ p -Komponente von \mathfrak{a} “. \mathfrak{o} bzw. \mathfrak{a} sind die Durchschnitte aller \mathfrak{o}_p bzw. \mathfrak{a}_p . Andererseits entspricht jedem System $\mathfrak{a}^{(p)}$ (p läuft) von Rechtsidealen in den zu einer festen Maximalordnung \mathfrak{o} gehörigen \mathfrak{o}_p ein \mathfrak{o} -Rechtsideal, dessen p -Komponenten die $\mathfrak{a}^{(p)}$ sind, falls von den $\mathfrak{a}^{(p)}$ nur endlich viele von \mathfrak{o}_p verschieden sind. Dieser Zusammenhang mit der Idealtheorie der A_p führt nun sofort zu den bekannten Resultaten über A , daß die zu einer Maximalordnung \mathfrak{o} von A gehörigen zweiseitigen Ideale eine Abelsche Gruppe bilden, daß alle Ideale aus A ein Gruppoid bilden, daß die Zentrumsprimideale p die n te Potenz eines zweiseitigen Primideals in \mathfrak{o} werden (n ein Teiler des Grades von A) und daß die Differente von \mathfrak{o} genau durch p^{n-1} teilbar ist. Erwähnt sei noch, daß von der p -adik fast nichts vorausgesetzt wird, die Sätze über kommutative p -adische Körper und deren Erweiterungen werden abgeleitet. *Köthe (Münster).*

Gruppentheorie:

Rössler, Karel: Le groupe des homographies reproduisant la cubique équi-anharmonique. *Čas. pěst. Mat. a Fys.* **60**, 166—172 (1931) [Tschechisch].

L'auteur, employant l'expression analytique des homographies reproduisant la cubique équi-anharmonique, étudie leurs propriétés géométriques et en déduit les propriétés de leur groupe. *Autoreferat.*

Robinson, G. de B.: On the fundamental region of a group, and the family of configurations which arise therefrom. *J. Lond. math. Soc.* **6**, 70—75 (1931).

Der Verf. zeigt, daß der von Schläfli benutzte Bereich zur Bestimmung der regulären Polytope in $[n]$ ein Fundamentalbereich für die Gruppe aller Symmetrien eines Polytopes ist. Außer einigen historischen Bemerkungen enthält die Arbeit noch einige ergänzende Bemerkungen, die das Problem der Bestimmung des Fundamentalbereiches von orthogonalen Gruppen, die im Bereiche der reellen Zahlen irreduzibel sind, betreffen. Als Grundlage der ganzen Untersuchung dient ein Resultat einer Bieberbachschen Untersuchung über diesen Gegenstand, das aussagt, daß eine orthogonale Gruppe der obigen Art dann und nur dann von endlicher Ordnung ist, wenn sie einen Fundamentalbereich besitzt. *Wegner (Göttingen).*

Bisshopp, K. E.: Abstract defining relations for the simple group of order 5616. *Bull. amer. math. Soc.* **37**, 91—100 (1931).

Gegenstand der Untersuchung ist die Kollineationsgruppe $LF(3,3)$ der Ordnung 5616. Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben, denen zwei Erzeugende S und T dieser Gruppe, für die $S^3 = T^2 = (TS)^{13} = 1$ ist, genügen müssen. Ferner werden die Erzeugenden ihrer maximalen Untergruppe der Ordnung 432, der Coleschen Gruppe des neunten Grades, angegeben.

J. J. Burckhardt (Basel).

Taketa, Kiyosi: Über die Primitivität einer auflösbaren Permutationsgruppe. (*Math. Inst., Kais. Univ. Tokyo.*) *Proc. imp. Acad. (Tokyo)* **7**, 31—32 (1931).

Beweis des Satzes, daß eine transitive auflösbare Permutationsgruppe dann und nur dann primitiv ist, wenn sie einen transitiven, minimalen Normalteiler besitzt.

Reinhold Baer (Halle a. S.).

Miller, G. A.: Inverse commutator subgroups. (*Dep. of Math., Univ. of Illinois, Urbana.*) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 144—147 (1931).

Sind s und t beliebige Elemente einer Gruppe G , so erzeugen die sämtlichen Elemente $s^{-1}t^{-1}st^{-1}$ eine invariante Untergruppe Γ , die „inverse Kommutatorgruppe“ von G . G/Γ ist abelsch, von der Ordnung 2^m und vom Typus $(1, 1, \dots)$, und Γ ist in allen invarianten Untergruppen mit derartiger Faktorgruppe enthalten. Verf. gibt u. a. Anwendungen auf Automorphismen Abelscher Gruppen, insbesondere auf solche der Ordnung 2 und auf Gruppen mit Abelscher Untergruppe H vom Index 2, für die jedes nicht in H enthaltene Element die Ordnung 4 hat. *Magnus* (Göttingen).

Pietrkowski, St.: Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen. Math. Annalen 104, 535—569 (1931).

Die Abelschen Gruppen werden unter wesentlicher Benutzung der von H. Prüfer geschaffenen Begriffsbildungen und Methoden behandelt (H. Prüfer, Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen 1, 2. Math. Z. 20, 22). Dabei wird im Anschluß an Arbeiten von R. Baer u. a. eine Abelsche Gruppe \mathfrak{G} als ein topologischer Punktraum dargestellt; die Gruppenelemente fungieren als Punkte und gewisse „große Untergruppen“ und ihre Restklassen (= Nebengruppen, die Gruppe wird additiv geschrieben) als Umgebungen. \mathfrak{H} heißt große Untergruppe von \mathfrak{G} , wenn in $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ jede absteigende Kette von Untergruppen nur endlich viele Glieder hat. Es gibt immer mindestens ein System von großen Untergruppen, das, mit seinen Restklassen als Umgebungssystem gewählt, den Hausdorffschen Umgebungssaxiomen genügt, nämlich das System aller großen Untergruppen. Eine Gruppe heißt abgeschlossen, wenn es in jedem System von Umgebungen, von denen je endlich viele einen gemeinsamen Punkt haben, auch einen allen Umgebungen gemeinsamen Punkt gibt. Eine beliebige Abelsche Gruppe läßt sich nach vorgenommener Topologisierung stets zu einer abgeschlossenen Gruppe erweitern; im allgemeinen auf verschiedene Weise, doch sind alle so entstehenden „abgeschlossenen Hüllen“ der Gruppe Quotientengruppen einer „maximalen“ unter ihnen, die entsteht, indem man alle großen Untergruppen und ihre Restklassen als Umgebungssystem wählt. Für abgeschlossene Gruppen gelten die Sätze: Jede abgeschlossene Abelsche Gruppe \mathfrak{G} ist die direkte Summe von abgeschlossenen Gruppen, welche sich nacheinander (in nicht notwendig abzählbarer Anzahl) von \mathfrak{G} als direkte Summanden abspalten lassen, und welche entweder isomorph sind mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung p^k (p ist eine beliebige Primzahl) oder mit der Additionsgruppe der Modulo eins reduzierten rationalen Zahlen mit einer beliebigen Potenz von p als Nenner oder mit der Additionsgruppe der ganzen p -adischen Zahlen oder mit der Additionsgruppe des Körpers der p -adischen Zahlen. Sind irgend zwei solche Zerlegungen von \mathfrak{G} in direkte Summanden gegeben, so lassen sich die Summanden der einen Zerlegung eineindeutig denen der anderen so zuordnen, daß entsprechende Summanden isomorph sind. Dabei ist die direkte Summe \mathfrak{G} einer beliebigen Menge abgeschlossener Gruppen $(\dots \mathfrak{G}_\tau \dots)$ — wobei τ eine beliebige Indexmenge durchläuft — dadurch definiert, daß \mathfrak{G} die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsgruppe aller \mathfrak{G}_τ sein soll und der Durchschnitt eines bestimmten \mathfrak{G}_τ mit der abgeschlossenen Hülle der Vereinigungsgruppe aller übrigen das Nullelement ist. Faßt man eine Abelsche Gruppe als verallgemeinerte Abelsche Gruppe mit ganzrationalem Operatorenbereich auf und ist α ein beliebiges Element der Gruppe, so lassen sich die „Häufungspunkte“ der Gruppe der Elemente, die aus α durch Anwendung der Operatoren des ganzrationalen Operatorenbereichs entstehen, als „ g -adische Vielfache“ von α darstellen; dabei ist der Ring der g -adischen Zahlen die direkte Summe aller Ringe der ganzen p -adischen Zahlen. Es gilt der Satz: Ist \mathfrak{G} eine unendliche Abelsche Gruppe mit g -adischem Operatorenring, und ist \mathfrak{G} auf zwei verschiedene, topologisch nicht homöomorphe Weisen unter Beibehaltung der Operatorzuordnung als abgeschlossen anzusehen, so sind trotzdem die entstehenden (oben charakterisierten) Zerlegungen in direkte Summanden isomorph.

Nach einer Mitteilung des Verf. muß es S. 569 oben in dem Beispiel einer nicht abgeschlossenen nicht zerlegbaren Gruppe heißen: $\zeta_1 \equiv 0(\mathfrak{G}_k)$, $\zeta_2 \equiv 0(\mathfrak{G}_k)$, ... $\zeta_n \equiv 0(\mathfrak{G}_k)$, ...
Magnus (Göttingen).

Analytische Zahlentheorie:

Schröder, J.: Bestimmung der Anzahl der Primzahlen im Bereiche von 1 bis x durch größte Ganze. Mitt. math. Ges., Hambg. 7, 20—31 (1931).

Für die zahlentheoretische Funktion $f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2} \pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3} \pi(\sqrt[3]{x}) + \dots$, wo $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ bedeutet, hat Viggo Brun zwei exakte Formeln abgeleitet [7. Skand. Math.-Kongr., Oslo 1929, 38—54; vgl. auch C. r. Acad. Sci. Paris 177, 810—813 (1923)]. Verf. löst diese Formeln mit Hilfe der Möbiusschen μ -Funktion nach $\pi(x)$ auf. (Übrigens wird $\pi(x)$ in der vorliegenden Arbeit mit $\varphi(x)$ bezeichnet.) Die gewonnenen Formeln werden durch Zahlenbeispiele erläutert. Kalmár (Szeged).

Corput, J. G. van der: Diophantische Ungleichungen. I. Zur Gleichverteilung modulo Eins. Acta Math. (Uppsala) 56, 373—456 (1931).

In einer dreiteiligen Arbeit wird der Verf. drei verschiedene Methoden entwickeln, mittels deren man in vielen Fällen entscheiden kann, ob irgendein vorgelegtes System von n (≥ 1) Ungleichungen in mehreren Unbekannten, unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat oder nicht. Die erste Methode (Teil I) benutzt die Begriffe und Prinzipien von H. Weyl in „Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo 1“ (Math. Ann. 77), während die beiden anderen Methoden neu sind. Allgemeine Fassung des Problems: Es sei F eine Folge von m -dimensionalen Quadern $Q \dots a_\mu \leq x_\mu < b_\mu$ (m fest ≥ 1 ; a_μ und b_μ ganz, $a_\mu < b_\mu$, $\mu = 1, 2, \dots, m$), wo der Inhalt

$$A(Q) = (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m) \rightarrow \infty, \quad (1)$$

wenn Q die Folge F durchläuft. Bei festem $n \geq 1$ seien jedem Q zugeordnet n reelle Funktionen $f_\nu(x)$, definiert für jeden Gitterpunkt $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ von Q . Es seien γ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) feste Zahlen mit $0 < \gamma_\nu \leq 1$. Es wird nun gefragt, ob das System der n diophantischen Ungleichungen

$$0 < f_\nu < \gamma_\nu \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x) , je aus einem Q hat; hierbei heißt der Gitterpunkt (x) eine (ganzzahlige) Lösung von (2), wenn ein Gitterpunkt (y_1, y_2, \dots, y_n) existiert, derart, daß die $m+n$ Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ dem System $0 < f_\nu(x) - y_\nu < \gamma_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) genügen. Nennen wir $A_2(Q)$ die Anzahl der Lösungen (x) in Q , dann heißt das System

der Funktionen f_1, f_2, \dots, f_n gleichverteilt mod. 1 in den Quadern Q , wenn $\frac{A_2(Q)}{A(Q)} \rightarrow$

$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$, wenn Q die Folge F durchläuft. Wegen (1) folgt in diesem Fall unmittelbar $A_2(Q) \rightarrow \infty$; überdies zeigt Verf., daß, wenn f_1, \dots, f_n gl. vert. mod. 1 sind, für beliebige feste reelle α_ν und β_ν ($\alpha_\nu < \beta_\nu \leq \alpha_\nu + 1$) das System

$$\alpha_\nu < \text{oder} \leq f_\nu \leq \text{oder} < \beta_\nu \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

die Eigenschaft $\frac{A_3(Q)}{A(Q)} \rightarrow (\beta_1 - \alpha_1) \dots (\beta_n - \alpha_n)$ hat, wenn Q wieder F durchläuft und wenn

$A_3(Q)$ die Anzahl der Lösungen von (3) ist. Die erste Haupteigenschaft der Theorie bildet der von Weyl herrührende, vom Verf. ausführlich begründete Satz: f_1, \dots, f_n sind in den Quadern Q dann und nur dann gleichvert. mod. 1, wenn für jeden festen Gitterpunkt $(h_1, h_2, \dots, h_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ gilt

$$\frac{1}{A(Q)} \sum_{(x) \in Q} e^{2\pi i (h_1 f_1 + \dots + h_n f_n)} \rightarrow 0, \quad (4)$$

wenn Q die Folge F durchläuft. Sofort folgt hieraus die zweite Haupteigenschaft: f_1, \dots, f_n sind in den Quadern dann und nur dann gleichverteilt mod. 1, wenn die Funktion $F = h_1 f_1 + \dots + h_n f_n$ es ist, für jeden festen Gitterpunkt $(h_1, h_2, \dots, h_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Der Verf. leitet einen sehr wichtigen allgemeinen Satz her, die sog. Fundamentale Ungleichung. Die wesentliche Bedeutung der F.U. (welche durch Induktion von m auf $m+1$ bewiesen wird) für diese Theorie ist, daß sie gestattet eine obere Grenze für den Ausdruck

$$\left| \frac{1}{A(Q)} \sum_{(x) \in Q} e^{2\pi i F(x)} \right|$$

zu finden, sobald man für $h = 0, 1, \dots, b_1 - a_1 - 1$ eine solche Grenze kennt für den Ausdruck:

$$\left| \frac{1}{A(Q_h)} \sum_{(x) \in Q_h} e^{2\pi i \{F(x_1 + h_1, x_2, \dots, x_m) - F(x_1, \dots, x_m)\}} \right|.$$

Hierin ist Q_h der Quader $a_1 \leq x_1 < b_1 - h$, $a_\mu \leq x_\mu < b_\mu$ ($\mu = 2, 3, \dots, m$). Aus der F.U. gewinnt Verf. dann die dritte Haupteigenschaft: Die Funktion $f(x)$ ist in den Quadern Q gleichverteilt. mod. 1, wenn für $h = 0, 1, \dots, b_1 - a_1 - 1$ die Funktion $f_h = f(x_1 + h, x_2, \dots, x_m) - f(x)$ es in den Quadern Q_h ist. (Ist $f(x)$ ein Polynom in x_1, x_2, \dots, x_m vom Grade $k \geq 1$ in x_1 , dann ist die entsprechende Funktion f_h ein Polynom in x_1, \dots, x_m vom Grade $k - 1$ in x_1 .) Deshalb läßt sich nun mit Hilfe der 3^{en} H.E. und mit Induktion nach dem Grad beweisen, daß jedes genannte Polynom $f(x)$, mit wenigstens einem nichtkonstanten Glied mit irrationalen Koeffizienten, in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1 ist (Weylscher Satz); aber Verf. gewinnt auch folgende Erweiterung: Wenn Q beim Durchlaufen von F die Eigenschaft hat $b_\mu - a_\mu \rightarrow \infty$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) und wenn k_1, \dots, k_m feste ganze Zahlen sind (≥ 0 , nicht alle $= 0$), dann ist jede reelle, für alle Gitterpunkte $(x) = (x_1, \dots, x_m)$ des Raumes definierte Funktion $f(x)$ in den Quadern gleichverteilt modulo 1, wenn nur $\Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} \dots \Delta_m^{k_m} f(x)$ nach einem festen irrationalen Grenzwert strebt, wenn gleichzeitig alle $x_\mu \rightarrow \infty$. (Selbstverständlich ist $\Delta_\mu^{k_\mu} = \Delta_\mu \Delta_\mu^{k_\mu - 1}$ und $\Delta_\mu^1 f = \Delta_\mu f = f(x_1, \dots, x_\mu + 1, \dots, x_m) - f(x)$.) Ebenfalls durch Induktion leitet Verf. aus der 3^{en} H.E. folgendes Resultat her: Q von F und k_1, \dots, k_m mögen den Bedingungen des vorigen Satzes genügen, es sei $k_1 > 0$. Jedem Q seien zwei positive Zahlen r und R zugeordnet mit $r \leq R$, $r(b_1 - a_1) \rightarrow \infty$, $R \rightarrow 0$, wenn Q die F durchläuft, und eine reelle für jeden Gitterpunkt von Q definierte Funktion $f(x)$. Dann ist $f(x)$ in den Quadern gleichverteilt mod. 1, wenn nur in jedem Quader $Q_k \dots a_\mu \leq x_\mu < b_\mu - k_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) die Funktion $\Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} \dots \Delta_m^{k_m} f(x)$ monoton nicht abnehmend ist in bezug auf x_1 und beständig im Intervall $r \leq \omega \leq R$, oder beständig in $-R \leq \omega \leq -r$ liegt (man darf statt „nicht abnehmende“ auch lesen „nicht zunehmende“). Für $m = 1$ ist $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ein Beispiel. In einem großen Abschnitt: „Näherungsweise ganzzahlige Auflösung algebraischer Gleichungen“ betrachtet Verf. allgemeine Systeme $-\varepsilon < f_\nu(x) < \varepsilon \pmod{1}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$); hierin sind n und ε fest, ist $0 < \varepsilon \leq 1$ und ist $f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ein beliebiges Polynom in x_1, x_2, \dots, x_m mit reellen Koeffizienten. Unter anderem gilt dann: Das System hat dann und nur dann für jedes genannte feste ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x) , wenn ein Gitterpunkt $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ existiert mit folgender Eigenschaft: Für jeden Gitterpunkt $(h_1, h_2, \dots, h_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, wofür das Polynom $h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_n f_n$ rationalzahlig ist (das konstante Glied außer Betracht gelassen), ist die Zahl $h_1 f_1(\sigma) + \dots + h_n f_n(\sigma)$ ganz. Für den Spezialfall, daß die f_ν lineare Polynome sind, leitet Verf. hieraus leicht einen Satz von G. Giraud her (C. r. des séances Soc. Math. de France 1914, 29). Normalsysteme. Sind

$$\chi_\lambda(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l; l \text{ fest} \geq 1)$$

Funktionen, definiert, reell und stetig in jedem Punkt (v_1, v_2, \dots, v_n) des Raumes, dann kann man bei jedem Q der im Anfang genannten Folge F , statt (2) oder (3) betrachten

$$\alpha_\lambda < \chi_\lambda(f_1(x) - y_1, \dots, f_n(x) - y_n) < \beta_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l). \quad (5)$$

(5) heißt Normalsystem; (2) und (3) sind solche mit $l = n$, $\chi_\lambda = v_\lambda$. Es gilt der Satz: Sind f_1, \dots, f_n gleichverteilt. mod. 1 in den Q , so hat (5) dann und nur dann unendlich viele ganzzahlige Lösungen, wenn ein Punkt (w_1, w_2, \dots, w_n) existiert mit $\alpha_\lambda < \chi_\lambda(w_1, \dots, w_n) < \beta_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \dots, l$). Ist $A_\varepsilon(Q)$ die Anzahl der Gitterpunkte (x) aus Q , bei denen ein Gitterpunkt (y_1, \dots, y_n) existiert mit (5), dann kann man $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A_\varepsilon(Q)}{A(Q)}$ berechnen (Q durchläuft F). Verf. gibt viele numerische Beispiele, zeigt auch, wie man oft Systeme normalisieren kann, d. h. zurückführen kann auf Systeme der Form (5).

J. F. Koksma (Amsterdam).

Ford, Walter B.: Two theorems on the partitions of numbers. Amer. math. Monthly 38, 183—184 (1931).

Die Arbeit enthält zwei mit den elementarsten Hilfsmitteln der additiven Zahlentheorie zu beweisende Rekursionsformeln zur Berechnung der Anzahl der Zerfällungen einer natürlichen Zahl in m te Potenzen natürlicher Zahlen mit und ohne Zulassung gleicher Summanden bei den Zerfällungen.

Bessel-Hagen (Bonn).

Evelyn, C. J. A., and E. H. Linfoot: On a problem in the additive theory of numbers. (II.) J. f. Math. 164, 131—140 (1931).

$N \geq 2$, n, n_1, n_2, a, b, x, y mögen natürliche Zahlen bedeuten, von denen N, a, b fest sind; p laufe über Primzahlen, $\varepsilon > 0$ sei beliebig. $v_2(n)$ gebe an, wie oft $n = n_1 + n_2$, wobei n_1 und n_2 durch kein p^N teilbar sind (für $N = 2$ z. B. hat man n als Summe

zweier quadratfreier Zahlen darzustellen). Mit elementaren Hilfsmitteln weisen die Verfasser nach, daß bei wachsendem n

$$\nu_2(n) = \frac{n}{\zeta^2(N)} \prod_{p^N \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p^N - 1)^2}\right) \prod_{p^N \mid n} \left(1 + \frac{1}{p^N - 1}\right) + O\left(n^{\frac{2}{N+1} + \varepsilon}\right)$$

ist. Folgende zu diesem Zweck herangezogene Abschätzung von H. Rademacher und A. Oppenheim, deren Beweis hier zum ersten Male veröffentlicht wird, ist an sich sehr bemerkenswert: die Diophantische Gleichung $ax^N + by^N = n$ besitzt höchstens $A n^\varepsilon$ Lösungspaare x, y , wobei A nur von N und ε abhängt. (Der wohlbekannte Spezialfall $a = b = 1$ ist für das Waringsche Problem wichtig.)

A. Walfisz (Radoś, Polen).

Friedrich, Rolf: Über die Zerfällung einer Zahl in Summanden in beliebigen algebraischen Zahlkörpern. Mitt. math. Ges., Hambg. 7, 31–58 (1931).

Es handelt sich um die Darstellung der ganzen total-positiven Zahlen ν eines algebraischen Zahlkörpers k durch eine feste Anzahl m total-positiver Summanden $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ und um die analogen Probleme, die aus diesem durch Anbringung von Größencharakteren und gewissen Exponentialausdrücken als Gewichten hervorgehen. Der Gang der Untersuchung läuft im wesentlichen parallel zu der Rademacherschen Primzahltheorie im algebraischen Zahlkörper, nur ist im vorliegenden Falle alles viel einfacher. Die Resultate lassen sich auch durch Gitterpunktbehandlungen ganz elementar beweisen; Zweck der Arbeit war in erster Linie, ein einfaches Beispiel zur additiven Zahlentheorie im algebraischen Zahlkörper zu erhalten. Verf. beweist:

$$A_m(\nu) = \sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m = \nu \\ \nu_j \equiv \alpha_j(a), \nu_j \geq 0}} \lambda_1(\nu_1) \lambda_2(\nu_2) \dots \lambda_m(\nu_m) e^{-\sum_{q=1}^n \frac{|\nu_1^{(q)}| + |\nu_2^{(q)}| + \dots + |\nu_m^{(q)}|}{|\nu^{(q)}|}} \\ = \frac{2^{r_2} (4\pi)^{r_2 m}}{(|\sqrt{d}| N(a))^{m-1}} \prod_{j=1}^m \lambda_j(\nu) T_m N^{m-1}(\nu) + O(N^{m-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\nu)).$$

Hier ist n der Körpergrad, d Körperdiskriminante, a ein Ideal, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ganze Zahlen aus k , $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ Größencharaktere, $m \geq 3$, $T_m \neq 0$, falls k total reell. Von Interesse ist, daß die Größenordnung von $A_m(\nu)$ durch die Gewichte $\lambda_1(\nu_1) \dots \lambda_m(\nu_m)$ nicht herabgedrückt wird, obgleich

$$\sum_{\substack{(\nu) \text{ ganz} \\ |N(\nu)| \leq x}} \lambda(\nu) = o(x), \text{ wenn } \lambda \neq 1.$$

Petersson (Hamburg).

Estermann, Theodor: Über die Darstellungen einer Zahl als Differenz von zwei Produkten. J. f. Math. 164, 173–182 (1931).

Es bezeichne $\nu(n, k)$ die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl k in der Form $k = xy - zu$, wo x, y, z, u natürliche Zahlen sind und $xy \leq n$ ist. In Verschärfung eines Ergebnisses von Ingham beweist Verf., daß für festes k , $n \rightarrow \infty$ und für jedes $\varepsilon > 0$ eine asymptotische Formel

$$\nu(n, k) = \frac{6}{\pi^2} \sigma_w(k) n \log^2 n + a_1 n \log n + a_2 n + O\left(n^{\frac{11}{12}} \log^{\frac{17}{6} + \varepsilon} n\right)$$

gilt, wobei $\sigma_w(k)$ die Summe der w ten Potenzen der Teiler von k bedeutet; a_1 und a_2 sind von k abhängige Zahlen. Als Haupthilfsmittel dient dabei die vom Verf. in einer früheren Arbeit [Abh. Math. Sem., Hambg. 7, 82–98 (1930)] im Anschluß an Kloosterman hergeleitete Ungleichung

$$\left| \sum_{\substack{\tau \\ \tau \mid q}} e^{\frac{2\pi i}{t}(qs+jv)} \right| \leq t^{\frac{3}{4}} \tau^{\frac{1}{4}} \left(\sigma_0\left(\frac{t}{\tau}\right) \right)^{\frac{3}{4}} \quad (\tau = (t, q))$$

für jede ganze q und j und natürliche t , wobei s in der Summe über die zu t teilerfremden Zahlen $\leq t$ läuft und v jedesmal die kleinste positive Wurzel der Kongruenz $sv \equiv 1 \pmod{t}$ bedeutet.

Kalmár (Szeged).

Analysis.

Infinitesimalrechnung, Reihen:

● Nernst, W., und A. Schoenflies: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. 11., v. W. Nernst u. W. Orthmann neu-bearb. Aufl. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1931. XIV, 478 S. u. 108 Abb. geb. RM. 20.—.

Pal, Bholanath: On the nature of the generalisation in the expansion of θ in the mean-value theorem of the differential calculus. Proc. phys-math. Soc. Jap., III. s. 13, 74—78 (1931).

Man kann, wie Pal im Bull. Calcutta Math. Soc. 19, Nr 3, 143—146 (1928) zeigte, θ in dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ in eine Potenzreihe entwickeln: $\theta = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots$. Der Koeffizient A_n enthält keine kleinere Ableitung als die 2te und höchstens die $(n+2)$ te Ableitung von $f(x)$. Nach Angabe des allgemeinen Bildungsgesetzes der A_n wird es verwendet, um die gewünschte Reihe im Falle $f(x) = e^x$ und im Falle $f(x) = \sin x$, $x = \pi/2$ zu ermitteln.

F. Knoll (Wien).

Groat, Benjamin F.: Mean value of the ordinate of the locus of the rational integral algebraic function of degree n expressed as a weighted mean of $n+1$ ordinates and the resulting rules of quadrature. Amer. math. Monthly 38, 212—219 (1931).

$f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$ sei ein Polynom $n-1$ -ten Grades mit beliebigen reellen Koeffizienten. Verf. stellt sich die Aufgabe, den Mittelwert des Integrales

$$V = \frac{\int_0^D f(x) dx}{D} \quad (D > 0)$$

als (mit Gewichten versehenes) Mittel aus den Ordinaten von n vorgegebenen Stellen x_v , $0 \leq x_v \leq D$, $x_v < x_{v+1}$, zu berechnen, d. h.

$$V = \frac{\sum_{v=1}^n y_v C_v}{\sum_{v=1}^n C_v}.$$

Aus den identisch erfüllten n linearen Gleichungen

$$(V - y_v) + a_{n-1}D^{n-1}\left(t_v^{n-1} - \frac{1}{n}\right) + a_{n-2}D^{n-2}\left(t_v^{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \dots + a_1D\left(t_v - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \left(v = 1, 2, \dots, n; t_v = \frac{x_v}{D}\right)$$

in den n Unbekannten $1, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ ergibt sich durch Nullsetzen der Determinante des Systems die gewünschte Relation. Spezialisiert man n , so ergeben sich bekannte Formeln, die bei der numerischen Integration gebraucht werden.

U. Wegner (Göttingen).

Geymonat, Ludovico: Un'osservazione sul teorema di Pringsheim per la serie di Taylor. Boll. Un. mat. ital. 10, 61—63 (1931).

Perchè una funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie di MacLaurin non è condizione sufficiente (mentre, come risulta dal teorema di Pringsheim, è condizione necessaria) che il suo resto di Cauchy tenda a zero per un valore di θ , ($0 < \theta < 1$), determinato, scelto in modo affatto arbitrario.

Autoreferat.

Brink, Raymond W.: A simplified integral test for the convergence of infinite series. Amer. math. Monthly **38**, 205—208 (1931).

Es sei $r(x)$ eine für $x \geq \mu$ (μ positive ganze Zahl) differenzierbare Funktion, für die

$$0 < A \leq r(x) \leq B;$$

$$\int_{\mu}^x |r'(x)| dx < D; \quad x > \mu$$

ist. Ist $\sum_{v=0}^{\infty} U_v$ eine Reihe, für die $r(n) = U_{n+1}/U_n$, ($n > \mu$) und $U_n > 0$ ist, so ist die Konvergenz des Integrales

$$\int_{\mu}^{\infty} e^{R(\mu, x)} dx \quad \text{mit} \quad R(\mu, x) = \int_{\mu}^x [r(x) - 1] dx$$

hinreichend für die Konvergenz der Reihe, und die Divergenz von

$$\int_{\mu}^{\infty} e^{\varrho(\mu, x)} dx \quad \text{mit} \quad \varrho(\mu, x) = \int_{\mu}^x [1 - 1/r(x)] dx$$

zieht die Divergenz der Reihe nach sich. Diesen Satz, der auch auf mehrfache Reihen ausgedehnt werden kann, beweist Verf. anschließend an früher publizierte Integral-kriterien für Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen [Trans. amer. Soc. **19** (1918); Ann. of Math., Ser. 2, **21** (1919)]. *U. Wegner* (Göttingen).

Tonelli, L.: Un teorema sulla derivazione delle serie. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 163—168 (1931).

„Jede Funktion $f_n(x)$ der Folge $f_1(x), f_2(x), \dots$ sei in $a < x < b$ mit Ableitungen $f'_n(x), f''_n(x), \dots, f_n^{(k)}(x)$ bis zur k ten Ordnung versehen, und die k ten Ableitungen $f_n^{(k)}(x)$ seien monoton. Wenn dann die Reihe $\sum f_n(x)$ an $k+2$ Stellen

$$a < x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1} < b$$

konvergiert, so trifft folgendes zu: a) Die Reihe $\sum f_n(x)$ ist in $x_0 \leq x \leq x_{k+1}$ gleichmäßig konvergent; b) Für jedes $r = 1, 2, \dots, k$ ist die Reihe $\sum f_n^{(r)}(x)$ in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $x_0 < x < x_{k+1}$ gleichmäßig konvergent; c) $F(x) = \sum f_n(x)$ ist in $x_0 < x < x_{k+1}$ mit Ableitungen $F'(x), F''(x), \dots, F^{(k)}(x)$ bis zur k ten Ordnung versehen, und es ist dort

$$F^{(r)}(x) = \sum f_n^{(r)}(x) \quad (r = 1, 2, \dots, k)."$$

Hierzu vergleiche man: N. Obreschkoff, C. r. Acad. Sci. Paris **191**, 373—375 (1930).

R. Schmidt (Kiel).

Adams, C. Raymond: On multiple factorial series. Ann. of Math., II. s. **32**, 67—82 (1931).

Der Verf. beschränkt sich in seiner Darstellung auf Doppelreihen der Form

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(i-1)!(j-1)!c_{ij}}{x(x+1) \dots (x+i-1) y(y+1) \dots (y+j-1)}. \quad (1)$$

Hierbei sind x, y komplexe Variable, $(-1)! = 1, 0! = 1$ und $x(x+1) \dots (x+i-1) = 1$ für $i = 0$. Für die Arbeit gilt die Pringsheimsche Definition der Konvergenz einer Doppelfolge. S_{ij} bezeichne allgemein die Summe der Glieder in den i -ersten Reihen und j -ersten Spalten einer Doppelreihe. Dann werden unter Anlehnung an Landau (Sitzungsber. Münch. Akad. **36**), Moore (Trans. amer. math. Soc. **29**) und Nörlund (Acta Math. **37**) folgende Sätze bewiesen: 1. Wenn die Reihe (1) an der Stelle (x_0, y_0) bei beschränkten S_{ij} konvergiert, so tut sie es auch an der Stelle (x_1, y_1) , wenn $x_1, y_1 \neq 0, -1, -2 \dots$ und $R(x_1) > R(x_0), R(y_1) > R(y_0)$. $R(x) =$ reeller Teil von x . 2. In einer gewissen Umgebung einer jeden Stelle, wo (1) bei beschränkten S_{ij}

konvergiert, konvergiert (1) gleichmäßig bei gleichmäßig beschränkten S_{ij} , stellt dort eine analytische Funktion dar und kann dort beliebig oft gliedweise partiell nach x oder y differenziert werden. 3. Konvergiert die Reihe (1) für (x_0, y_0) absolut, so tut sie es auch für (x_1, y_1) , wenn $R(x_1) \geq R(x_0)$, $R(y_1) \geq R(y_0)$. 4. Der Verf. glaubt, daß der Landausche Satz von der Identität des Konvergenzgebietes einer einfachen Fakultätenreihe mit dem der zugeordneten Dirichletschen Reihe sich nicht allgemein auf Doppelreihen ausdehnen läßt. Doch läßt sich der Satz retten, wenn man sich auf das Gebiet absoluter Konvergenz beschränkt. 5. Konvergiert die Reihe (1) an der Stelle (x_0, y_0) bei beschränkten S_{ij} und ist $R(x_1) > R(x_0) + 1$, $R(y_1) > R(y_0) + 1$, so konvergiert (1) an der Stelle (x_1, y_1) absolut. 6. Die Reihe (1) konvergiert gleichmäßig für $R(x) \geq \chi > 0$, $R(y) \geq \psi > 0$, wenn χ und ψ bzw. größer sind als $R(x_1)$ und $R(y_1)$, wobei (x_1, y_1) irgendeine Stelle des Konvergenzgebietes ist. 7. Ist $f(x, y)$ an der Stelle (∞, ∞) analytisch, so kann sie in einem gewissen Gebiet durch eine Reihe der Form (1) dargestellt werden. Aus diesen Sätzen schließt der Verf. folgendes: Zu jeder Reihe (1) gibt es zwei Paare von charakteristischen Zahlen λ_1, λ_2 und μ_1, μ_2 ($\lambda_1 \leq \mu_1$, $\lambda_2 \leq \mu_2$), so daß die Reihe divergiert oder mit unbeschränkten S_{ij} konvergiert, wenn entweder $R(x) < \lambda_1$ oder $R(y) < \lambda_2$ oder beides, bei beschränkten S_{ij} bedingt konvergiert, wenn $\lambda_1 < R(x)$ und $\lambda_2 < R(y)$ und entweder $R(x) < \mu_1$ oder $R(y) < \mu_2$ oder beides und absolut konvergiert, wenn $R(x) > \mu_1$, $R(y) > \mu_2$. Dieser Schluß ist m. E. nicht begründet. Neß (Kiel).

Gronwall, T. H.: On the Cesàro sums of Fourier's and Laplace's series. (*Dep. of Phys., Columbia Univ., New York.*) *Ann. of Math.*, II. s. 32, 53—59 (1931).

La somme n 'ième de Cesàro d'ordre k relative à la série $\sum_{v=0}^{\infty} u_v$ étant définie par la relation

$$A_n^{(k+1)} S_n^{(k)} = \sum_{v=0}^n A_v^{(k+1)} u_{n-v} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; k \geq 0),$$

avec

$$A_0^{(k)} = 1, \quad A_n^{(k)} = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k) \Gamma(n+1)} \quad (n > 0),$$

on sait bien que l'inégalité

$$m \leq f(x) \leq M$$

entraîne

$$m \leq S_n^{(1)}\{f(x)\} \leq M,$$

où $S_n^{(1)}\{f(x)\}$ désigne la somme de Cesàro relative à la série de Fourier qui est associée à la fonction $f(x)$, supposée périodique et continue. L'auteur démontre que cette proposition ne saurait être étendue au cas où l'ordre k de la somme $S_n^{(k)}\{f(x)\}$ est plus petit que un. Une conclusion analogue est faite au sujet de la série de Laplace qui est associée à une fonction $f(0, \varphi)$, continue sur la sphère-unité. W. Gontcharow.

Garabedian, Henry L.: On the relation between certain methods of summability. *Ann. of Math.*, II. s. 32, 83—106 (1931).

Das Hauptergebnis ist der Satz: Wenn eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ durch ein Cesàrosches Verfahren von positiver Ordnung summierbar ist, dann ist sie auch durch das Verfahren von Le Roy summierbar, d. h. für $x \rightarrow 1-0$ strebt

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(nx+1)}{n!} a_n$ einem Grenzwert zu. Außerdem werden ähnliche Sätze über das

Mittag-Lefflersche Verfahren und über solche Verfahren, die aus gewissen Dirichletschen Reihen entspringen, bewiesen. — Die Terminologie des Verf. erscheint bedenklich, wenn er sagt: „A-summability includes B-summability“, und damit meint: „Das Summierungsverfahren A ist stärker als das Verfahren B.“ R. Schmidt (Kiel).

Verblunsky, S.: On the limit of a function at a point. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 32, 163—199 (1931).

Let $\varphi(t)$ be (L) [or even (D)] integrable. The author is concerned with the Cesàro and Hölder means of $\varphi(t)$ defined by

$$C^{(k)}(t) \equiv kt^{-k} \int_0^t \varphi(u)(t-u)^{k-1} du \equiv kt^{-k} \Gamma(k) \sigma^{(k)}(t), \quad k > 0, \quad (1)$$

and

$$\varphi_p(t) \equiv t^{-\alpha} \int_0^t \varphi_r(u)(t-u)^{\alpha-1} du, \quad p = r + \alpha, \quad r = [p] \geq 0 \quad (2)$$

respectively, where

$$\varphi_0(t) \equiv \varphi(t), \dots, \varphi_n(t) \equiv t^{-1} \int_0^t \varphi_{n-1}(u) du.$$

The notation $\varphi(t) = o(1)(C, k)$ or $\varphi(t) = o(1)(H, p)$ is used to designate, respectively, that $C^{(k)}(t) \rightarrow 0$ or $\varphi_p(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$. These integral means possess several properties analogous to those for infinite series. The main results of the paper are as follows.

(a) If $\varphi(t)$ is (D) integrable, then $\varphi(u) = o(1)(H, p)$, $p > 0$, implies $\varphi(u) = o(1)(C, p)$

and vice-versa. (b) If $\varphi(t)$ is (L) integrable and $p \geq 0$, $\int_0^t |\varphi_p(u)| du = O(t)$, $\varphi(t) = o(1)(H, r)$ for some positive integer r , then $\varphi(t) = o(1)(H, 1 + \delta)$ for all $\delta > 0$. (c) If

$\varphi(t)$ is (L) integrable and $\int_0^t |\varphi_p(u)|^q du = O(t)$ ($q > 1$) and $\varphi_p(t) = o(1)(H, r)$ for

some positive integer r , then $\varphi_p(t) = o(1)(H, 1/q + \delta)$ for all $\delta > 0$. [For a special case of (a), when p is integer, see Hardy and Littlewood, Proc. Lond. math. Soc. II. s., 22, XL—XLIII (1924).] To establish these important results an extensive use is made

of various generalizations of known properties of fractional integrals. Among others the following facts are proved. (d) The formula

$$\int_0^v (v-u)^{\delta-1} du \int_0^u \varphi(y)(u-y)^{\alpha-1} dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)} \int_0^v \varphi(y)(v-y)^{\alpha+\delta-1} dy, \quad \alpha > 0, \delta > 0 \quad (3)$$

[which is well known when $\varphi(t)$ is (L) integrable] holds even when $\varphi(t)$ is only (D) integrable in $(0, \xi)$, provided either of the conditions (1—3) below is satisfied: (1) $\varphi(t)$ is

(L) integrable in (η, ξ) for every $0 < \eta < \xi$; (2) $\alpha \geq 1$; (3) $\varphi(t)$ is of the form $t^{-1} \int_0^t f(w) dw$

where $f(w)$ is (L) integrable. In the case (1) formula (3) holds for almost all v in $(0, \xi)$, while in the cases (2—3) it holds for all v in $(0, \xi)$ without exception. [Comp. analogous theorem of Bosanquet, Proc. Lond. math. Soc. II. s., 31, 134—143 (1930).] (e) If $0 < k < l$ and

$$g(x, \xi) \equiv \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\xi \varphi(u)(x-u)^{k-1} du \quad (0 < \xi < x)$$

then

$$|g(x, \xi)| \leq \max_{0 \leq u \leq \xi} |\sigma^{(k)}(u)|,$$

where, in evaluating the maximum in the second member, we can neglect a set of measure zero of values of u ; provided that (1) $\varphi(t)$ is absolutely integrable in $(0, x)$, or (2) $\varphi(t)$ is (D) integrable in $(0, x)$ and is of the form (d, 3) above. [For a special case when $\varphi(t)$ is bounded see M. Riesz, Acta Szeged 1, 114—126 (1922—1923).] The proofs, although somewhat long, are of essentially elementary nature, being based on most elementary properties of the integrals involved (formula of integration by parts, first and second laws of mean). The author expects to give applications of the results obtained to the theory of Fourier series.

J. D. Tamarkin (Providence).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie und Verwandtes:

Fukuhara, Masuo: Sur l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, II. (*Math. Inst., Imp. Univ., Tokyo.*) Proc. imp. Acad. (Tokyo) 7, 37—39 (1931).

Etant donné un système d'équations différentielles ordinaires

$$dy_i/dx = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(f_i sont des fonctions continues et bornées dans le domaine $D: 0 \leq x \leq a$), $S_\xi(P)$ désigne, pour chaque point P du domaine D , l'ensemble des points d'intersection des courbes intégrales passant par le point P , avec le hyperplan $x = \xi$ ($0 \leq \xi \leq a$). L'auteur établit quelques propositions sur la structure topologique des ensembles $S_\xi(P)$, pour le cas où le système envisagé ne possède qu'un nombre fini de points singuliers (c.-à-d. de points par lesquels passent plusieurs courbes intégrales).

Saks (Warschau).

La Vallée Poussin, C. de: Sur quelques extensions de la méthode du balayage de Poincaré et sur le problème de Dirichlet. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 651—653 (1931).

Es werden im wesentlichen folgende Sätze angegeben: 1. Es sei A ein ein- oder mehrfach zusammenhängender, ebener, beschränkter, von rektifizierbaren Kurven begrenzter Bereich. Denkt man sich im Innern von A eine Masse so verteilt, daß ein am Rande C stetiges Potential existiert, so läßt sich diese Masse derart auf den Rand von A schaffen („ausfegen“), daß dabei das Potential im Äußeren von A ungeändert bleibt. Bezeichnet $\mu(s)$ die so auf den Rand gebrachte Masse (s Bogenlänge auf C), so wird das neu entstandene Potential durch $V(P) = \int_C \log \frac{1}{r} d\mu(s)$ gegeben (r Entfernung des Punktes P von dem durch s

gegebenen Randpunkt). 2. Wählt man als Masse speziell die Einheitsmasse im Punkte P aus dem Innern von A und bezeichnet mit $\mu(s, P)$ die durch Ausfegung auf den Rand gebrachte Masse, so wird durch $U(P) = \int_C U(s) d\mu(s, P)$ die erste Randwert-

aufgabe der Potentialtheorie mit den (stetig) vorgegebenen Randwerten $U(s)$ gelöst. — Die Forderung der Rektifizierbarkeit der Randkurven kann durch die Forderung ersetzt werden, der Rand C soll aus Jordankurven bestehen. — Es werden ferner entsprechende Sätze angegeben, die sich auf das Äußere von A bzw. auf den dreidimensionalen Fall beziehen.

Rellich (Göttingen).

Demtchenko, Basile: Sur le problème mixte inverse et les surfaces de glissement dans l'espace doublement connexe. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 604—606 (1931).

Verf. knüpft an seine C. R.-Note 189 (1929), 725—726 an, wo er das im wesentlichen eindeutig lösbare „Umkehrproblem zum Dirichletschen Problem“ behandelt: Gesucht ist ein einfach zusammenhängendes von einer geschlossenen (sich hinreichend „regulär“ verhaltenden) Kurve C begrenztes Gebiet Ω in einer Z -Ebene und eine dort harmonische Funktion $\psi(Z)$, welche auf C vorgeschriebene „Randwerte g “ und deren Normalableitung $d\psi/dn$ auf C die vorgegebenen „Werte h “ annimmt. Dabei sind g und h als (etwa stetige) Funktionen $g(\vartheta)$, $h(\vartheta)$ auf $|z| = |re^{i\vartheta}| = 1$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$, gegeben, und „ $\psi(Z)$ hat auf C die Randwerte g “ bedeutet: Bildet $Z = f(z)|z| < 1$ auf Ω ab, so soll für $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ ($|z| < 1$) $\psi(Z) = \psi(f(z)) \rightarrow g(\vartheta)$ sein. Entsprechendes bedeutet $(d\psi/dn)_C = h$. Unter Verwendung analoger Konventionen — die Rolle des Einheitskreises übernimmt i. f. ein Kreisring $0 < r_1 \leq |z| = |re^{i\vartheta}| \leq r_2$ — behandelt Verf. die folgende Aufgabe: Ω bezeichne ein 2 fach zusammenhängendes Gebiet in der Z -Ebene mit den Randkurven C_1, C_2 . C_1, C_2 mögen aus Bögen ω_ν und λ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) bestehen. Gesucht wird ein solches Gebiet Ω und eine dort harmonische Funktion $\psi(Z)$, wenn bekannt sind: 1. die Bögen ω_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) der zu suchenden

Kurven C_1, C_2 ; 2. die Randwerte g von $\psi(Z)$; 3. die Werte h der Normalableitung $d\psi/dn$ auf den zu bestimmenden Bögen λ_v . Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit dieser Aufgabe. Der in großen Zügen geschilderte Beweis stützt sich auf frühere Noten des Verf. [C. r. 189, 725 bis 726 (1929) u. dies. Zbl. 1, 19]. Zum Schluß wird eine hydromechanische Anwendung gegeben.

S. Warschawski (Göttingen).

Jung, Heinrich: Die Erzeugung orthogonaler Koordinatensysteme in der Ebene und im Raum durch ein Koordinatenpotential. J. f. Math. 164, 67–79 (1931).

Verf. behandelt die Aufgabe, zu einer vorgegebenen geschlossenen Kurve Σ orthogonale Koordinatensysteme zu konstruieren, so daß Σ selbst als Koordinatenkurve auftritt; außerhalb von Σ bieten die Niveaukurven und Kraftkurven einer auf Σ konstanten Potentialfunktion II ein solches System, innerhalb von Σ diejenigen der analytischen Fortsetzung von II . Entsprechendes gilt für den Raum. Lüneburg.

Brelot, M.: Sur l'équation $\Delta u = c(x, y) u(x, y)$, $c > 0$, quand $c(x, y)$ admet des points singuliers; et une équation de Fredholm correspondante à noyau singulier. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 21–49 (1931).

Unter den die Potentialgleichung $\Delta u = 0$ verallgemeinernden Differentialgleichungen sind diejenigen besonders einfach zu behandeln, die — wie jene linear — ein Zusatzglied in u mit einem gewissen, festen Vorzeichen besitzen; da sie nämlich ebenfalls nur Lösungen besitzen, die in keinem inneren Punkte eines Bereichs ein echtes Maximum annehmen können, lassen sie sich leicht mit den Potentialfunktionen selber vergleichen. Der Verf. erweitert nun bekannte Resultate für stetig differenzierbare $c(x, y)$ auf solche mit gewissen Singularitäten, löst dafür das innere und äußere Dirichletsche Problem (Schwarzsches alternierendes Verfahren) und studiert die Eigenschaften von u in der Nähe von singulären Punkten von $c(x, y)$ unter Benutzung der zugehörigen Fredholmschen Integralgleichungen.

H. Lewy (Göttingen).

Cibrario, Maria: Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali. II. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 115–118 (1931).

Die hyperbolische Differentialgleichung

$$\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \mu_1 \mu_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

(λ_1, \dots, μ_2 bedeuten dreimal stetig differenzierbare Funktionen von x und y) wird durch Transformation auf Charakteristiken auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = g\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

zurückgeführt. Gewisse für diese Differentialgleichung bekannte Existenz- und Eindeigkeitssätze lassen sich dadurch auch für die ursprüngliche Gleichung aussprechen.

Rellich (Göttingen).

Pfeiffer, G.: Construction de l'opérateur général permutant les intégrales d'une équation, linéaire et homogène, aux dérivées partielles du premier ordre. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 660–662 (1931).

Der Verf. gibt eine neue Methode zur Konstruktion des allgemeinen Ausdruckes für den Operator

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

der die Integrale der Gleichung

$$X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

permutiert. (Mit f ist auch $Y(f)$ ein Integral der Gleichung.) Diese Konstruktion geht vom vollständigen System der Integrale der Gleichung $X(f) = 0$ aus und wird dann ohne Integration ausgeführt.

Ephrämowitsch (Moskau).

Slebodzinski, W.: Sur les formes symboliques de différentielles. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 867—869 (1931).

Sei
$$\omega = \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} \delta x_{\alpha_1} \delta x_{\alpha_2} \dots \delta x_{\alpha_r} \quad (1)$$

eine symbolische Differentialform und

$$D(f) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (2)$$

eine inf. Transformation, die (1) gestattet, so daß $D(\omega) = \lambda \omega$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\bar{\omega} = \varrho \omega$ so beschaffen ist, daß $\int \bar{\omega}$ ebenfalls (2) gestatte, besteht in dem Erfülltsein der Differentialgleichung $D(\log \varrho) + \lambda = 0$ für ϱ . Dieser Satz wird verallgemeinert. Anstatt zu sagen: die Form ω gestattet $D(f)$, wenn $D(\omega) = \lambda \omega$ erfüllt ist, wird nun die Ausdrucksweise gebraucht, die Form ω ist „von der k ten Art in bezug auf $D(f)$ “, wenn

$$D^{(k)}(f) = \sum_{i=1}^k \lambda_i D^{(k-i)}(\omega),$$

wo $D^{(0)}(\omega) \equiv \omega$, $D^{(\alpha)}(\omega) = D[D^{(\alpha-1)}(\omega)]$, ($\alpha = 1, 2, \dots$) und nicht alle λ_i identisch verschwinden. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$\int \bar{\omega} = \int \sum_{i=1}^k \varrho_i D^{(k-i)}(\omega)$$

invariant bei $D(f)$ ist, wenn ω von k ter Art ist, besteht nun in dem Erfülltsein der Gleichung

$$D^{(k)}(\varrho_1) + D^{(k-1)}(\lambda_1 \varrho_1) - D^{(k-2)}(\lambda_2 \varrho_1) + \dots + (-1)^{(k-1)} D^{(0)}(\lambda_k \varrho_1) = 0$$

und der Beziehungen

$$\varrho_i = (-1)^{i-1} [D^{(i-1)}(\varrho_1) + D^{(i-2)}(\lambda_1 \varrho_1) - \dots + (-1)^{(i-1)} D^{(0)}(\lambda_{i-1} \varrho_1)] = 0$$

($i = 1, 2, \dots, k$).

E. Schuntner (Wien).

Shaw, A. A.: H. von Koch's first lemma and its generalization. Amer. math. Monthly 38, 188—194 (1931).¹⁾

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz der unendlichen Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_1 & 1 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_2 & 1 & \alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

besteht in der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} \beta_{\nu}$. Für diese von H. von Koch bemerkte Tatsache gibt der Verf. einen neuen einfachen Beweis, indem er zu D_m , dem m -ten Abschnitt von D , als Vergleichsdeterminante

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 + |\alpha_1 \beta_1| & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 + |\alpha_2 \beta_2| & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 + |\alpha_3 \beta_3| & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

heranzieht und zeigt, daß $|D_{m+p} - D_m| < A_{m+p} - A_m$ ist, woraus unmittelbar folgt, daß die absolute Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} \beta_{\nu}$ hinreichend ist. Daß sie auch notwendig ist,

ist trivial. Anschließend verallgemeinert der Verf. noch den obigen Satz auf Determinanten der Form:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0^{(2)} & a_0^{(3)} & \dots & a_0^{(m)} & 0 & \dots & \dots \\ a_1^{(1)} & 1 & a_1^{(2)} & \dots & \dots & a_1^{(m)} & 0 & \dots \\ 0 & a_2^{(1)} & 1 & a_2^{(2)} & \dots & \dots & a_2^{(m)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

U. Wegner (Göttingen).

Michal, A. D.: One-parameter linear functional groups in several functions of two variables. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) Bull. amer. math. Soc. **37**, 100—104 (1931).

Verf. betrachtet folgendes System integro-differentialer Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \tau} z_i(x, y; \tau) = \sum_{j=1}^n \int_x^y H_{ij}(x, s) z_j(s, y; \tau) ds = \sum_{j=1}^n \dot{H}_{ij} \dot{z}_j(x, y; \tau),$$

(Bezeichnung Volterras).

Die Lösung wird von den Anfangsbedingungen

$$z_i(x, y; 0) = z_i(x, y)$$

eindeutig bestimmt und ergibt sich nach den üblichen Methoden. Betrachtet man in den Lösungsformeln τ als ein Parameter, so definieren sie eine Gruppe linearer Funktionaltransformationen des Funktionensystems z_1, z_2, \dots, z_n ; die vorgeschriebenen Gleichungen liefern die zugehörige erzeugende Infinitesimaltransformation. Folgt eine Anwendung auf einen Sonderfall.

R. Caccioppoli (Padova, Italien).

Pini, Editta: Sopra una classe di equazioni integrali. Boll. Un. mat. ital. **10**, 79 bis 82 (1931).

Zurückführung einer speziellen Volterraschen Integralgleichung 2. Art auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

Gianfranco Cimmino (Göttingen).

Funktionentheorie:

● **Bieberbach, Ludwig: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. 2. Moderne Funktionentheorie. 2. verb. u. verm. Aufl.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1931. VI, 370 S. u. 47 Abb. geb. RM. 20.—.

Die Darstellung der modernen Funktionentheorie, welche Bieberbach in der neuen Auflage seines Lehrbuches gibt, ist den Funktionentheoretikern ihren Hauptzügen nach bereits aus der ersten Auflage bekannt. Unter Beibehaltung alles Wesentlichen hat der Verf. in der zweiten Auflage die neuesten Fortschritte der Forschung auf anerkannter Weise berücksichtigt; auch der Text ist an mehreren Stellen umgearbeitet worden. Wie in der ersten Auflage, handelt es sich auch hier in den 8 Abschnitten der Reihe nach um: konforme Abbildung, die elliptische Modulfunktion, beschränkte Funktionen, Uniformisierung, den Picardschen Satz, ganze Funktionen, analytische Fortsetzung und die Riemannsche Zetafunktion. Bei vielen dieser fundamentalen funktionentheoretischen Fragen führt die Darstellung bis zu den allerneuesten Ergebnissen; wo Raumangel oder sonstige Rücksichten nicht erlaubten, einen erschöpfenden Überblick über die behandelten Problemkomplexe zu geben, ist durch zahlreiche Literaturhinweise im Text dafür gesorgt, daß der Leser den Weg zu gewünschten Ergänzungen findet. — Eine wesentliche Umarbeitung haben insbesondere die Abschnitte über beschränkte Funktionen und über den Picardschen Satz erfahren. Das Schwarzsche Lemma und seine Erweiterungen, die Sätze von Julia und Löwner, werden in einer Form, zu der erst der vor einigen Jahren veröffentlichte Satz von Caratheodory über die Winkelableitung einer beschränkten Funktion den Grund gelegt hat, ausführlich behandelt. Diese schöne Gruppe von Sätzen, welche zusammen ein einheitliches Ganze bilden, ist von großer Anwendbarkeit und gehört zu den wichtigsten Prinzipien der allgemeinen Funktionentheorie. — In diesem Abschnitt ist ebenfalls der Satz von Milloux aufgenommen worden. Letzterer, der als ein spezieller Fall des ausführlich behandelten „Zweikonstantensatzes“ betrachtet werden kann, enthält eine numerische Konstante, deren genauer Wert noch nicht bekannt ist und deren Bestimmung letzthin das Interesse verschiedener Funktionentheoretiker in Anspruch genommen hat. Die Schlußparagrafen des Abschnittes über den Picardschen Satz sind dem Blochschen Satze gewidmet, ein Satz von hohem selbständigen Interesse, da er ein neuartiges

Kriterium zur Bestimmung des Typus einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche enthält. Nachdem der Beweis des Blochschen Satzes von Valiron und Landau vereinfacht worden ist, liefert dieser Satz auch einen sehr elementaren Weg zum Picardschen Satze. Der Abschnitt über ganze Funktionen enthält ebenfalls eine interessante Neuigkeit: Den Beweis von Ahlfors für die Denjoy'sche Vermutung, wonach eine ganze Funktion von der Ordnung k höchstens $2k$ verschiedene endliche asymptotische Werte haben kann. Die Beweisführung von Ahlfors ist von großer Tragweite und wird aller Wahrscheinlichkeit nach noch eine hervorragende Rolle in der Singularitätenforschung spielen. Zu bedauern ist nur, daß durch die Aufnahme des Ahlfors'schen Beweises kein Platz mehr für die Carlemansche Methode übriggeblieben ist. Führt auch diese in dem erwähnten Zusammenhange nicht so weit wie die Ahlfors'sche Methode, so ist immerhin das ihr zugrunde liegende „Prinzip der Gebietserweiterung“ von hervorragender prinzipieller Bedeutung, indem es gestattet, verschiedene wichtige funktionentheoretische Sätze von einem einheitlichen Standpunkte aus zu behandeln. Es sei z. B. darauf hingewiesen, daß dieses Prinzip die Grundlage des von Schmidt gegebenen einfachen Beweises des Milloux'schen Satzes (§ 5, 10) bildet. Im übrigen erscheint der Abschnitt über ganze Funktionen in seiner älteren Fassung; auf die neuesten Untersuchungen über die Wertverteilung wird nicht eingegangen. Auch eine noch so kurze Darstellung dieser Theorie hätte ohne Zweifel zu viel Raum in Anspruch genommen. — Die Abschnitte über Uniformisierung, analytische Fortsetzung und die ζ -Funktion sind ebenfalls wesentlich unverändert geblieben. Hardy's Satz über die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ wird in einer von Pólya gegebenen Form dargestellt. — Der 2. Band des Bieberbach'schen Lehrbuches nimmt als die einzige einigermaßen vollständige Darstellung der neueren Funktionentheorie eine Sonderstellung in der funktionentheoretischen Literatur ein. Der Leser erhält hier einen vielseitigen Einblick in die Fragen, welche die Funktionentheoretiker gegenwärtig vor allem beschäftigen. Unter diesen Problemen gibt es eine große Anzahl, die nicht nur „modern“ sind, sondern die dank ihrer Bedeutung wohl auch einen dauernden Platz in der Funktionentheorie behaupten werden.

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Schmid, W.: *Imaginärgeometrie und die Residuen Cauchys*. Mh. f. Math. 38, 167 bis 172 (1931).

Die Darstellung des imaginären Punktes mit den cartesischen Koordinaten $(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)$ durch das reelle Punktepaar $(x_1, y_1), (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ wird mit den Cauchyschen Residuen in Zusammenhang gebracht: Sei $y = y_1 + iy_2$ eine in einem Gebiet C bis auf endlich viele Stellen reguläre Funktion von $x = x_1 + ix_2$ und $K: [x_1(t), x_2(t)]$ eine samt ihrem Innern dem Gebiet C angehörende reelle, einfache, geschlossene, orientierte Kurve, längs der $y(x)$ regulär ist. In

$$\begin{aligned} \int_K y dx &= \int_K y_1 dx_1 - \int_K y_2 dx_2 + i \int_K (y_1 dx_2 + y_2 dx_1) \\ &= \int_K y_1 dx_1 - \int_K y_2 dx_2 + i \left\{ \int_K (y_1 dx_2 + y_2 dx_1 + y_1 dx_1 + y_2 dx_2) - \int_K y_1 dx_1 - \int_K y_2 dx_2 \right\} \end{aligned}$$

bedeuten die rechtsstehenden reellen Kurvenintegrale Flächeninhalte, umschlossen von bzw. den Kurven $K_1: [x_1(t), y_1(t)]$, $K_2^*: [x_2(t), y_2(t)]$ und $K_2: [x_1(t) + x_2(t), y_1(t) + y_2(t)]$. Es wird mit bekannten funktionentheoretischen Hilfsmitteln bewiesen, daß $\int_K y dx$ verschwindet, wenn K keine singuläre Stelle umschließt, anderenfalls

gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen in den von K eingeschlossenen singulären Stellen von $y(x)$ ist und an einem Beispiel das Ergebnis durch Berechnung der oben genannten Flächeninhalte verifiziert.

Ruth Moufang (Frankfurt a. M.).

Streetman, Flora, and L. R. Ford: *A certain polynomial expansion*. (Rice Inst., Houston, Texas.) Amer. math. Monthly 38, 198–201 (1931).

Es sei Γ eine reguläre geschlossene Kurve, die einen Bereich \mathfrak{B} begrenzt, der den Nullpunkt enthält und auf dem $f(z)$ analytisch ist. Auf Γ sei $f(z)$ noch stetig. Für $z \prec \mathfrak{B}$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z}.$$

Setzt man $t - z = (1 + h)t - (z + ht)$, so kann $1/t - z$ dargestellt werden in der Form:

$$\frac{1}{t - z} = \sum_{v=0}^n \frac{(z + ht)^v}{(1 + h)^{v+1} t^{v+1}} + \frac{(z + ht)^{m+1}}{(1 + h)^{m+1} t^{m+1} (t - z)},$$

so daß

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^n P_{\nu}(z) + R_n(z)$$

ist, wobei $P_{\nu}(z)$ das Polynom

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z+ht)^{\nu}}{(1+h)^{\nu+1} t^{\nu+1}},$$

und $R_n(z)$ einen entsprechenden Rest bezeichnet. Verf. betrachtet nun den Konvergenzbereich der Polynomreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}(z)$$

und zeigt, daß dieser Konvergenzbereich, in dem die Reihe die Funktion auch wirklich darstellt, größer ist als der Konvergenzkreis der Reihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu},$$

falls nicht der Konvergenzkreis gerade die natürliche Grenze ist. *U. Wegner.*

Rowe, Charles H.: A proof of the asymptotic series for $\log \Gamma(z)$ and $\log \Gamma(z+a)$. *Ann. of Math.*, II. s. **32**, 10–16 (1931).

Zur Herleitung der Stirlingschen asymptotischen Entwicklungen

$$\begin{aligned} \lg \Gamma(z) &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \frac{B_2}{1 \cdot 2z} + \frac{B_4}{3 \cdot 4z^3} + \dots \\ &\quad + \frac{B_{2n}}{(2_{n-1}) 2n z^{2n-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right) \end{aligned}$$

und allgemeiner

$$\begin{aligned} \lg \Gamma(z+a) &= \left(z+a - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \frac{B_2(a)}{1 \cdot 2z} - \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1} B_{n+1}(a)}{n(n+1) z^n} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \quad (-\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta) \end{aligned}$$

wird der folgende Satz benutzt: „Wenn $F(z)$ analytisch ist, und $F(z+1) - F(z)$ in der Umgebung der Stelle $z = \infty$ in der Form

$$F(z+1) - F(z) = \frac{\alpha_2}{z^2} + \frac{\alpha_3}{z^3} + \dots$$

darstellbar ist, dann gestattet $F(z)$ im Sektor $-\pi + \delta \leq z \leq \pi - \delta$ ($|z| \rightarrow \infty$) eine asymptotische Entwicklung der Form

$$F(z) = p(z) + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

worin $p(z)$ eine Funktion der Periode 1 ist.“ Im übrigen werden nur geläufige Eigenschaften der Γ -Funktion gebraucht. Weitergehend wird sogleich die Gültigkeit des eben genannten Satzes und damit der asymptotischen Entwicklungen für $\lg \Gamma(z)$ und $\lg \Gamma(z+a)$ in einem Bereich D nachgewiesen, den man erhält, wenn man aus der komplexen Ebene die links von der imaginären Achse gelegenen Stellen $z = x + iy$, für die $|y|^k < a|x|$ ist, fortläßt. *R. Schmidt* (Kiel).

Hartogs, F., und A. Rosenthal: Über Folgen analytischer Funktionen. (Ergänzung zur Arbeit im 100. Band.) *Math. Annalen* **104**, 606–610 (1931).

Un ensemble fermé et borné situé dans le plan xy , est dit ensemble (α) lorsque toute fonction définie et continue sur cet ensemble peut y être approximée uniformément par des polynômes en z ($z = x + iy$). Les auteurs prouvent que tout ensemble borné, fermé, de mesure superficielle nulle et qui ne découpe pas le plan, est un ensemble (α) . Le résultat n'est pas complet; il n'embrasse pas, p. ex., le cas d'arc simple de mesure (superficielle) positive. Un théorème de M. Lavrentieff [*C. r. Acad. Sci. Paris* **184**, 1643 (1927)] permet d'obtenir le résultat plus complet: pour qu'un ensemble fermé et borné soit ensemble (α) , il faut et il suffit qu'il soit non-dense et ne découpe pas le plan. Cependant, d'après les

indications des auteurs, la démonstration de théorème de M. Lavrentieff exige des méthodes beaucoup plus compliquées que le théorème dont la démonstration fort simple et élégante est donnée dans la note de M. M. Hartogs et Rosenthal.

Saks (Warschau-Zoliborz).

König, Karl: Die ersten Koeffizienten schlichter Funktionen. Mitt. math. Ges., Hambg. 7, 9—12 (1931).

Wenn die Funktion $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ regulär und schlicht ist in $|z| < 1$, so ist $|a_2| \leq 2$ und $|a_2| = 2$ nur für die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1 - \varepsilon z)^2}.$$

Für den 3. Koeffizienten a_3 gilt Löwners Ungleichung $|a_3| \leq 3$. Der Verf. hat gezeigt, daß die zu $|z| < 1$ schlichte Funktion

$$F(z) = \frac{z}{(1 - \alpha z - \varepsilon \beta z^2)^2}$$

dort einen Pol 2. Ordnung hat, wenn $\beta \neq 0$ und $a_3 \geq 3$. *A. Gelfond* (Moskau).

Chevalley et Herbrand: Groupes topologiques, groupes fuchsien, groupes libres. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 724—726 (1931).

Es wird in der Note auf den Zusammenhang zwischen den unendlichen abzählbaren Gruppen und den Überlagerungsflächen einer gegebenen Riemannschen Fläche hingewiesen und auf dieser Grundlage gewisse, teils schon früher bekannte, die Struktur jener Gruppen betreffende Sätze hergeleitet.

P. J. Myrberg (Helsinki).

Srivastava, P. L.: On two theorems of Akhyeser and a theorem of Cramér. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 116—120 (1931).

$f(z)$ étant une fonction entière d'ordre fini positif ϱ et du type moyen de cet ordre, Lindelöf et Phragmén ont étudié dans un Mémoire classique (Acta math. 31) les propriétés de la fonction

$$h(\varphi) = \limsup_{r=\infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r^\varrho}.$$

P. L. Srivastava applique leurs résultats. Il montre qu'ils donnent de suite une proposition contenant le théorème I. d'Akhyeser (Rend. Circ. mat. Palermo 51). Ce premier résultat de l'auteur peut s'énoncer sous cette forme: $f(z)$ étant d'ordre ϱ au plus, $h(\varphi) \leq 1$, $0 < \alpha < \pi$, s'il existe deux nombres φ_1 et φ_2 tels que

$$h(\varphi_1) < -\cos \alpha/2, \quad h(\varphi_2) \leq -\cos \alpha/2, \quad |\varphi_1 - \varphi_2| = \alpha/\varrho,$$

$f(z)$ est identiquement nulle. S. complète par la même méthode un théorème de Cramér (Ark. mat. ast. 13, Nr 22). Son résultat principal est le suivant: $f(z)$ étant d'ordre ϱ au plus, $h(\varphi) \leq 1$, si x étant réel, $|x|$ indéfiniment croissant, α positif ou nul,

$$f(x) e^{-x} = O(|x|^\alpha), \quad (1)$$

$f(z) e^{-z}$ est un polynome de degré α au plus. Il s'ensuit évidemment que, si en outre, $f(z) e^{-z}$ tend vers zéro lorsque z s'éloigne indéfiniment sur une demi-droite, $f(z)$ est identiquement nulle. On peut remarquer que ce résultat de S. se généralise: en remplaçant le second membre de (1) par $O(e^{|x|^\beta})$, $\beta < \frac{1}{2}$, $f(z) e^{-z}$ est d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ et le théorème de Wiman s'applique. L'auteur fait aussi observer que le théorème II d'Akhyeser est erroné: il est en contradiction avec les propriétés de e^{-z} .

G. Valiron (Strasbourg).

Calugaréano, Georges: Une généralisation du théorème de M. Borel sur les fonctions méromorphes. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 329—330 (1931).

Der Verf. sucht eine Verallgemeinerung des bekannten Borelschen Satzes über die Divergenz der Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu(z)^{\varrho-\varepsilon}},$$

wo $r_\nu(z)$ die Modulen der Nullstellen von $f(x) - z$ und ϱ die Ordnung der meromorphen Funktion $f(x)$ sind, für den Fall einer Funktion von unendlicher Ordnung oder von der Ordnung Null. Als natürliche Vergleichsfunktion wird die charakteristische Funktion $T(r)$ gewählt. Durch einfache Anwendung der Nevanlinnaschen Sätze gelangt der Verf. zu folgendem Ergebnis: Die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{T(sr_\nu) \log T(sr_\nu) \log_2 T(sr_\nu) \dots (\log_p T(sr_\nu))^{1+\alpha}} \quad (s > 1, \alpha > 0)$$

konvergiert für alle Werte z , während die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{T(r_\nu) \log T(r_\nu) \log_2 T(r_\nu) \dots \log_p T(r_\nu)}$$

divergiert, außer möglicherweise für 2 Werte z . Für den 2. Teil des Satzes muß jedoch vorausgesetzt werden, daß $T(r)$ von quasi-regulärem Wachstum ist, d. h. $r^\epsilon/T(r)$ soll schließlich abnehmen. Noch allgemeiner konvergieren alle Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{T(sr_\nu) C(T(sr_\nu))}, \quad (s > 1)$$

falls das Integral $\int^\infty dx/C(x)$ endlich ist, während die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{T(r_\nu) C(T(r_\nu))}$$

gleichzeitig mit dem Integral $\int^\infty dx/C(x)$ divergiert, außer möglicherweise für 2 Werte z .
L. Ahlfors (Göttingen).

Valiron, Georges: Remarques sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 476—478 (1931).

Ergänzende Bemerkungen zu der von Calugaréano gegebenen Formulierung des Borelschen Satzes vom Konvergenzexponenten (vgl. vorst. Referat). Ullrich (Marburg).

Bergmann, Stefan: Über ausgezeichnete Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Annalen **104**, 611—636 (1931).

Für den Dizylinder $D: |X| \leq 1; |Z| \leq 1$ ist die Kantenfläche $|X| = 1; |Z| = 1$ in dem Sinne „Bestimmungsfläche“ für die in D regulären biharmonischen Funktionen U (d. h. Realteile innerhalb D reg. anal. Funktionen), als durch Angabe der Werte von U auf $|X| = 1; |Z| = 1$ die Funktion U schon eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt gibt es zu jeder stetigen Wertverteilung auf $|X| = 1; |Z| = 1$, die gewissen Integralbedingungen genügt, stets eine in D reguläre biharmonische Funktion. Verf. zeigt, daß jede (zweidim.) Fläche \mathfrak{F} , die sich auf die Z -Ebene als eine einfach geschlossene Linie c projiziert, so daß $Z = \text{konst} = \bar{Z}$ \mathfrak{F} längs einer Linie $\mathfrak{b}(\bar{Z})$ schneidet, in genauer analoger Weise wie oben für einen gewissen vierdimensionalen Bereich \mathfrak{A} Bestimmungsfläche ist. Dabei wird noch vorausgesetzt, daß jede Linie $\mathfrak{b}(\bar{Z})$ in der X -Ebene einen von Z unabhängigen, beliebig kleinen Kreis j umschließt. Die Nebenbedingungen, welche die Randwerte auf \mathfrak{F} zu erfüllen haben, schreiben sich mit Hilfe der in X harmonischen Funktion $U(X, \bar{Z})$, die auf \mathfrak{F} jene Werte annimmt, als unendlich viele Integralbedingungen, wobei über die Fläche (X auf j , Z auf c) integriert wird. Den zu \mathfrak{F} gehörigen Bereich \mathfrak{A} bekommt Verf. auf folgende Weise. Man kann durch eine einfache analytische Abbildung c durch den Einheitskreis \mathfrak{k} ersetzen. Diesen teile man in 2^n gleiche Teile und nenne \mathfrak{b}_{nk} die den Teilpunkten zugeordneten Linien $\mathfrak{b}(Z)$. Versteht man unter $T_{\nu k}(Z)$ eine konforme Abbildung des Z -Einheitskreises auf ein symmetrisch zur reellen Achse gelegenes gleichschenkliges Dreieck mit der Seitenlänge 1, dessen Spitze $T_{\nu k} = 1$

dem k -ten Teilpunkt von \mathfrak{f} entspricht und dessen Öffnungswinkel π/ν sehr klein ist, so geht durch die Abbildung

$$X^* = T_{\nu k}(Z) \cdot X, \quad Z^* = Z$$

der von \mathfrak{f} in der Z -Ebene, von \mathfrak{h}_{nk} in der X -Ebene begrenzter Bereich \mathfrak{B}_{nk} in einen Bereich \mathfrak{B}_{nk}^* über. Die Vereinigung sämtlicher Bereiche \mathfrak{B}_{nk} gibt dann den gesuchten Bereich \mathfrak{A} , der \mathfrak{F} als Bestimmungsfläche hat. Kähler (Hamburg).

Cartan, Henri: Sur les variétés définies par une relation entière. Bull. Sci. math., II. s. 55, 24—32 u. 47—64 (1931).

Der Verf. setzt in der vorliegenden Arbeit seine in der Abhandlung „Sur les fonctions de deux variables complexes“ [Bull. Sci. math. 54, 99—116 (1930)] begonnenen Untersuchungen fort, deren Zweck ist, gewisse grundlegende Sätze aus der Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale auf solche Riemannsche Flächen zu übertragen, die durch eine ganze Gleichung, d. h. eine Gleichung der Form

$$F(x, y) = 0$$

dargestellt werden, wo $F(x, y)$ eine ganze transzendente Funktion ihrer Argumente bezeichnet. Z. B. werden als Integrale erster Gattung diejenigen Integrale der auf der ganzen Riemannschen Fläche meromorphen Funktionen verstanden, die in jedem endlichen Punkt der Fläche endlich bleiben. Sie können in der Form

$$\int \frac{P(x, y)}{F_y'} dx$$

dargestellt werden, wo $P = 0$ eine adjungierte Kurve bezeichnet. Ferner hat man für die Integrale zweiter Gattung den Ausdruck

$$\sum \int \frac{G(x, y) dx}{(x-a)^m (y-b)^p},$$

wo $G(x, y)$ eine passend gewählte ganze Funktion bezeichnet. Zum Schluß wird näher auf die Frage nach der eindeutigen Parameterdarstellung der betreffenden Riemannschen Flächen eingegangen, wobei insbesondere die einfach zusammenhängenden Flächen berücksichtigt werden, die nach der allgemeinen Theorie der Uniformisierung entweder auf die endliche Ebene oder auf das Innere des Einheitskreises konform abgebildet werden können. Von dem 2. Fall möge hier das folgende bemerkenswerte von Valiron gefundene Beispiel zitiert werden: Es sei s reell ($0 < s < 1$) und

$$R(z) = z \frac{z-s}{1+sz},$$

ferner $f(z)$ die für $|z| < 1$ reguläre und den Bedingungen $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ genügende Lösung der Schröderschen Gleichung

$$f[R(z)] = s f(z)$$

und $f'(z)$ ihre Ableitung. Dann definiert das Gleichungspaar

$$x = f(z), \quad y = f'(z)$$

eine einfach zusammenhängende, durch eine ganze Gleichung darstellbare Riemannsche Fläche. P. J. Myrberg (Helsinki).

Osgood, William F.: The locus defined by parametric equations. Ann. of Math., II. s. 32, 107—120 (1931).

Es werden die im Raume der komplexen Variablen $x_1 \dots x_m$ durch analytische Gleichungen der Form

$$x_\alpha = f_\alpha(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (\alpha = 1, 2 \dots m) \quad (*)$$

— die f_α sind in der Umgebung $(u) = 0$ verschwindende algebraische Funktionen — definierten Gebilde nach dem Rang ϱ der Matrix $(\partial f_i / \partial k_k)$ eingeteilt und auf ihre einzelnen evtl. verschieden-dimensionalen Bestandteile untersucht. Als Anwendung ergibt sich der Satz: Durch eine Transformation der Form (*) mit $m = n = \varrho$ geht eine in $(u) = 0$ reguläre Funktion $\Phi(u_1, u_2 \dots u_n)$ in eine in den Variablen $x_1, x_2 \dots x_n$ für $(x) = 0$ algebraische Funktion über. Kähler (Hamburg).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

Romanovsky, V.: Généralisations d'un théorème de M. E. Slutsky. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 718–721 (1931).

Es sei $\dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots$ eine Reihe von zufälligen Größen, die den Bedingungen $E x_i = 0, E x_i^2 = \sigma^2 = \text{konst.}, E x_i x_{i+k} = 0$ ($k \geq 0$) Genüge leisten, wo E jedesmal die mathematische Erwartung der betreffenden Größe bedeutet. Man setze

$$x_i^{(1)} = x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-s+1} \quad (s \geq 2)$$

und allgemein

$$x_i^{(n)} = x_i^{(n-1)} + x_{i-1}^{(n-1)} + \dots + x_{i-s+1}^{(n-1)},$$

ferner $z_i = \Delta^m x_i^{(n)}$. Wenn n und m derart unendlich werden, daß $m/n \rightarrow \alpha \neq 1$, so gehorcht die Reihe $\dots z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots$ im Limes einem sinusoidalen Verteilungsgesetz. Dieser Satz, der früher [C. r. Acad. Sci. Paris 185, 169 (1927)] von Slutsky für den Fall $s = 2$ festgestellt war, wird nun für alle $s \geq 2$ bewiesen. A. Khintchine.

Guldberg, Alf: On Poisson's frequency function. Skand. Aktuarietidsskr. H. 1/2, 43–48 (1931).

Charlier und Jörgensen haben versucht die Poissonsche Häufigkeitsfunktion $f(x) = \lambda^x e^{-\lambda} (x!)^{-1}$, welche zunächst nur für ganzzahlige x gegeben ist, durch bestimmte Integrale zu interpolieren. Als „beste“ Interpolation wird man nach Guldberg eine Interpolation durch eine Funktion zu bezeichnen haben, welche der gleichen Differenzengleichung genügt wie die gegebene diskrete Funktion, mit dieser Funktion an den entsprechenden Stellen übereinstimmt und gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzt. Es ist nun $f(x+1) = \lambda(x+1)^{-1} f(x)$. Weder das Integral von Charlier noch das von Jörgensen genügt dieser Differenzengleichung, es erfüllt jedoch die Funktion $f(x) = e^{-\lambda} \lambda^x [\Gamma(1+x)]^{-1}$ alle von G. aufgestellten Forderungen. Aus der Darstellung

$$f(x) = \exp[(c + \ln \lambda)x - \lambda] \prod_1^\infty n \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

ergeben sich die für die Berechnung von $f(x)$ wichtigen Multiplikationstheoreme:

$$f(x) \cdot f(-x) = e^{-2\lambda} \frac{\sin \pi x}{\pi x}; \quad \prod_0^{n-1} s f\left(\frac{x-s}{n}\right) = n^{x-\frac{1}{2}} (2\pi\lambda)^{\frac{1-n}{2}} e^{-(n-1)\lambda} f(x).$$

Ein Vorzug dieser Funktion $f(x)$ ist es, daß sie zu einem einfachen Kriterium führt, ob eine gegebene statistische Reihe $H(x)$ näherungsweise durch die Poissonsche Häufigkeitsfunktion dargestellt werden kann: Ist $\Delta[H(x+1) \cdot (x+1) : H(x)]$ näherungsweise gleich 0, so kann man $H(x)$ durch die Poissonsche Häufigkeitsfunktion approximieren. Ein numerisches Beispiel zeigt die Verwendung der Funktion $f(x)$.

F. Knoll (Wien).

Romanovsky, V.: Sulle regressioni multiple. Giorn. Ist. ital. Attuari 2, 161–171 (1931).

Die übliche Methode zur Bestimmung der Regressionskoeffizienten einer Größe y in bezug auf eine Gruppe von Größen x_1, x_2, \dots, x_n leidet an dem Mangel, daß im Fall der Heranziehung einer oder mehrerer neuer Größen x_i alle Rechnungen wieder von Anfang an durchgemacht werden müssen. Der Verf. gibt einen anderen, auf einer Modifikation der Tchebycheffschen Interpolationsmethode beruhenden Ansatz, der es ermöglicht, bei jeder Erweiterung des Größensystems x_i die früher ausgeführten Rechnungen systematisch auszunützen. Auch die Anordnung des Kalküls wird explizit angegeben. Zum Schluß werden Verallgemeinerungen angedeutet. Khintchine.

● Galbrun, Henri: Théorie mathématique des assurances. (Collect. Armand Colin [Sect. de math.] Nr 138.) Paris: Armand Colin 1931. 211 S. Frs. 10.50.

Nach einer kurzen Darstellung des Gesetzes der großen Zahlen wird im 1. Kapitel eine ungemein klare Entwicklung der Anwendung dieses Gesetzes auf die Lebensversicherung gegeben. Im 2. Kapitel werden nach Behandlung der wichtigsten Formeln der Zinseszins-

und Rentenrechnung die theoretischen Ansätze für die Prämienberechnung der Lebensversicherung unter Verwendung des Gesetzes der großen Zahlen entwickelt. Im 3. Kapitel findet man eine eingehende Untersuchung der mit dem Aufbau und der praktischen Konstruktion der Sterbetafeln zusammenhängenden Problemstellungen, unter anderen die Makehamsche Formel, die Newtonsche Interpolationsformel, die Lubbocksche Formel, mechanische Ausgleichsverfahren. Das 4. Kapitel ist der Herleitung der grundlegenden Formeln für die einmaligen Nettoprämien der verschiedenen Hauptformen der Lebensversicherung gewidmet. Den Hauptinhalt des 5. Kapitels bildet die Berechnung der Tarifprämien der verschiedenen Hauptkombinationen der Versicherungen auf ein Leben. Zu den anregendsten Teilen des Buches zählen die Analyse des Begriffes „mathematische Reserve“ und die daraus folgende Aufstellung der Theorie im 6. Kapitel, an die sich im 7. Kapitel die Ableitung des mit dem Begriff „Prämienreserve“ zusammenhängenden Formelbestandes schließt. Die Amortisation der Werbekosten, Rückkauf, Vertragsänderungen werden in gedrängter Form im 8. Kapitel besprochen. Die Versicherung auf verbundene Leben wird im 9. Kapitel untersucht; eine eingehende theoretische Einführung führt zur Entwicklung der grundsätzlichen Formeln der Gruppenversicherung; es folgt ein Hinweis auf die bekannte Eigenschaft der Makehamschen Formel und ihre Verwendung in der Versicherung auf verbundene Leben. Ausführlich werden die Verträge, die auf das Leben einer Gruppe gegründet sind, welche mit dem letzten Todesfall ausscheidet, sowie eine Reihe von Formen der Überlebensversicherung studiert. Das Prinzip der Komposition der Verträge „la méthode de décomposition des contrats“ wird in den Grundzügen entwickelt. — Dieses Büchlein, das auf bescheidenem Raum eine Fülle von Wissen in klarer, lesbarer Form vermittelt, wird der Praktiker gerne nachschlagen, der Theoretiker wird darin eine Reihe bemerkenswerter Anregungen finden; der Studierende wird neben der Einführung in die Fragestellungen der Personenversicherung auch den Einblick in die Forschungsmethoden (durch die regelmäßige Verwendung der Integraldarstellungen!) begrüßen.

F. Knoll (Wien).

Zwiggli, Ernst: Zum Problem der Erneuerung. Bl. Versich.math. (Beil. d. Z. Versich.wiss. 31) 2, 18–27 (1931).

Die Ermittlung der Erneuerungszahl einer offenen statistischen Gesamtheit wurde durch Ch. Moser auf die Lösung einer Volterraschen Integralgleichung, durch Wyss auf die Lösung einer Summengleichung zurückgeführt. Zwiggli beschränkt seine Untersuchung auf Gesamtheiten von konstantem Umfang und verzichtet auf die formale Ermittlung der Erneuerungszahl (-funktion), sucht aber Aussagen über ihren Verlauf im großen zu machen. Es gelingt ihm, durch einfache Abschätzung der extremen Werte der Erneuerungsfunktion zu dem Satze zu gelangen: „In einem Bestande vom konstanten Umfange H verfolgt die Erneuerungszahl eine gedämpfte Wellenbewegung, die im Beharrungszustand in einen konstanten Wert übergeht.“ Mit ganz analogen Mitteln wird gezeigt, daß in einem Bestand von konstantem Umfang jeder Vorgang, der eine Funktion des Alters ist, nach dem Typus einer gedämpften Schwingung um einen konstanten Wert oszilliert.

F. Knoll (Wien).

Santaeroce, Guido: Sopra un metodo di calcolo del valore attuale di alcune notevoli assicurazioni su gruppi di teste. Giorn. Ist. ital. Attuari 2, 203–212 (1931).

Das von Lindelöf behandelte Problem der Bestimmung des derzeitigen Mittelwertes einer lebenslänglichen, nachschüssigen Leibrente, die auf eine Gruppe von r Personen (x_1, x_2, \dots, x_r) gegründet ist und deren Jahresertrag die Werte k_α , $\alpha = 1, 2, \dots, r$ annimmt, wenn und solange noch α Personen am Leben sind, läßt sich unter Verwendung des „Prinzips der Komposition der Verträge“ in der Form

$$X = \xi_1 \sum a_{i_1} + \xi_2 \sum a_{i_1 i_2} + \dots + \xi_r a_{1, 2, \dots, r}$$

lösen. Es bedeutet in diesem Ausdruck $\sum a_{i_1 i_2 \dots i_\alpha}$ die Summe aller möglichen $\binom{r}{\alpha}$ derzeitigen Mittelwerte der nachschüssigen Leibrenten vom Betrage 1, die auf Teilgruppen von α Personen $\left[\text{insgesamt } \binom{r}{\alpha} \right]$ gegründet werden können und aufhören, wenn aus dieser Gruppe die erste Person stirbt. Die Größen ξ_α sind durch die Formel

$$\xi_\alpha = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^\beta k_{\alpha-\beta}$$

bestimmt. Das angegebene allgemeine Ergebnis wird auf 3 wichtige Sonderfälle angewendet. Eine Verallgemeinerung der Fragestellung von Lindelöf führt dazu, zu untersuchen, wie sich der Mittelwert errechnet, wenn die jährliche Leistung nicht nur von der Zahl der Glieder der Gruppe, sondern von der versicherungstechnischen Charakteristik der einzelnen Personen abhängt. Für den fraglichen Mittelwert erhält man den Ausdruck (Formel von Quiquet)

$$Y = \sum \xi_{i_1} a_{i_1} + \sum \xi_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2} + \cdots + \xi_{1,2,3,\dots,r} a_{1,2,\dots,r}$$

worin $\xi_{i_1 i_2 \dots i_\alpha} = k_{i_1 i_2 \dots i_\alpha} - \sum k_{i_1 i_2 \dots i_{\alpha-1}} \dots (-1)^{\alpha-1} \sum k_{i_1}$ und $k_{i_1 i_2 \dots i_\alpha}$ die jährliche Leistung bedeutet, wenn und solange die Personen ($x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$) leben und die Summe $\sum k_{i_1 i_2 \dots i_\beta}$ über alle Kombinationen der Klasse β der Elemente $i_1, i_2, \dots, i_\alpha$ zu erstrecken ist. Die Anwendung dieses Ergebnisses wird an den gewöhnlichen Typen der Überlebensrenten gezeigt. Für den derzeitigen Mittelwert einer Gruppenversicherung auf r Personen, durch die der Versicherer zur Zahlung von k_α ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, r-1$) verpflichtet wird, sobald aus der Gruppe von $r - \alpha$ Überlebenden der erste stirbt, findet man nach ähnlichen Überlegungen die Formel

$$Z = \xi_1 \sum A_{i_1} + \xi_2 \sum A_{i_1 i_2} + \cdots + \xi_r A_{1,2,\dots,r}$$

worin

$$\xi_\alpha = \sum_{\beta}^{\alpha-1} \binom{\alpha-1}{\beta} k_{\alpha-\beta} (-1)^\beta$$

ist und die Größen $A_{i_1 i_2 \dots i_\alpha}$ analoge Bedeutung haben (Todesfallversicherung!) wie oben die Größen $a_{i_1 i_2 \dots i_\alpha}$. Eine Spezialisierung dieser Formel beschließt die Untersuchung.

F. Knoll (Wien).

Numerische und graphische Methoden.

Fenner, G.: Das Genauigkeitsmaß von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten der Beobachtungsreihen. Naturwiss. 1931 I, 310.

Bekannte Formeln aus der Fehlerrechnung. S. Gradstein (Darmstadt).

Helwig, W. F.: Graphical construction of hyperbolic functions. Electr. Eng. 50, 117—118 (1931).

Es wird ein einfaches Instrument zur Bestimmung der Werte von Hyperbelfunktionen im komplexen Gebiet beschrieben. Zugrunde liegt die Umformung

$$\Re\{(\alpha + i\beta) = e^{\alpha/2} (\cos \beta + i \sin \beta) + e^{-\alpha/2} (\cos \beta - i \sin \beta) = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$$

bzw. $\text{Ein}(\alpha + i\beta) = \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2$. Der Vektor \mathfrak{B}_1 wird durch eine nach α bezifferte, unter dem Winkel β gegen die x -Achse auf ein gewöhnliches Polarkoordinatenpapier aufgelegte $e^{\alpha/2}$ -Skala hergestellt, an ihn schließt sich der Vektor \mathfrak{B}_2 durch eine gelenkig angehängte $e^{-\alpha/2}$ -Skala unter dem Winkel $-\beta$ gegen die x -Achse. $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ wird auf dem Polarkoordinatenpapier abgelesen, gleichzeitig kann man auch $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2$ bestimmen. Erläuterung durch Beispiel; die Ergebnisse sollen bei passender Dimensionierung auf 3 Stellen genau sein. Praktische Brauchbarkeit des Instruments meines Erachtens wohl nur für $\alpha < 2$. Druckfehler: OC der Abbildung ist $e^{\alpha/2}$, nicht $e^{-\alpha/2}$.

G. Koehler (Darmstadt).

Fischer, Alexander: Graphische Rechentafeln (Nomogramme) für die Berechnung der Selbstinduktion einer Spule. Elektr. Nachr.-Techn. 8, 179—182 (1931).

Für eine häufig angewandte Formel zur Berechnung der Selbstinduktion einer Spule werden 2 Nomogramme entwickelt, bei denen ein rechtwinkliges Geradenkreuz zur Ablesung verwandt wird. Das 1. Nomogramm wird nach einem vom Verf. in der Z. angew. Math. 7—9 veröffentlichten Verfahren konstruiert, es ist eine Vereinigung von Netz- und Fluchtlinientafel. Zur Konstruktion der 2. Tafel wird die gegebene Formel etwas umgeschrieben, man kann dann leicht eine „Kreuzfluchtentafel“ mit geraden Leitern entwerfen. Das in der Anmerkung erwähnte Nomogramm des Radio-News-

Amateurs-Handbook ist eine gewöhnliche zusammengesetzte Leitertafel mit Zapfenlinie; von den zahlreichen Nomogrammen, denen die gleiche Formel zur Berechnung der Selbstinduktion einer Spule zugrunde liegt, erscheint mir die neu angegebene Kreuzfluchtentafel für die Praxis am geeignetsten. *G. Koehler (Darmstadt).*

Willis, Ben S.: Mechanical aids in the construction of vector diagrams; numerical solutions combined with graphical representations. Gen. electr. Rev. **34**, 224—227 (1931).

Man kann sich die Bestimmung der Komponenten eines Vektors in bezug auf eine beliebige Achse sehr erleichtern, wenn man ein bewegliches Koordinatensystem anwendet. Hierzu wird ein rechtwinkliges Zelluloiddreieck mit einer Zentimeterteilung auf den Katheden benutzt. Um auch Vektoren der Form $\mathfrak{A} = a(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ auftragen zu können, wird auf das Dreieck ein Kreis vom Radius 10 um den Scheitel des rechten Winkels gezeichnet und die Teilstriche der Kathetenteilungen bis zu diesem Kreis verlängert. Mit diesem Instrument lassen sich Vektoren, die in der einen oder anderen komplexen Schreibweise gegeben sind, leicht aufzeichnen, die Genauigkeit wird zu etwa 2% angegeben. Um höhere Genauigkeiten zu erzielen, wurde ein „Vektordiagraph“ entwickelt. In ein Reißbrett ist eine drehbare Platte von etwa 50 cm Durchmesser eingesetzt, auf der die Zeichnung aufgespannt wird. Auf einer vertikalen Schiene mit Millimeterteilung ist ein ebenfalls mit Millimeterteilung versehenes horizontales Lineal verschiebbar. Die Nullpunkte beider Teilungen liegen so, daß die durch sie horizontal und vertikal gezogenen Geraden als Koordinatenachsen durch den Mittelpunkt der drehbaren Zeichenfläche gehen. Man kann also jeden Punkt der Zeichenfläche mittels der Skalen als komplexe Zahl in bezug auf dieses Koordinatensystem deuten; eine Drehung der Koordinatenachsen entspricht einer Drehung der Zeichenfläche. Die Anwendung des neuen Gerätes wird an zahlreichen Beispielen erläutert, neben den graphisch gefundenen Werten sind die numerisch errechneten zum Vergleich angegeben. Die Genauigkeit des Instrumentes wird bei guter mechanischer Ausführung etwa 0,2% betragen. *G. Koehler (Darmstadt).*

● **Ott, A.: Der harmonische Analysator Mader-Ott.** Kempten (Allgäu). Selbstverl. 1931. 17 S.

I. Allgemeines über harmonische Analyse. Kurze Zusammenstellung der Gestalt der Entwicklung und der Formeln für die Fourierschen Koeffizienten. II. Theorie und Beschreibung des Instruments. Durch eine Ähnlichkeitstransformation wird die Periode der gezeichnet vorliegenden Kurve auf eine feste Länge gebracht. Aus konstruktiven Gründen ist damit eine Verschwenkung um einen rechten Winkel verbunden. Die Berechnung der Fourierschen Koeffizienten geschieht durch Planimetrieren, indem ein Fahrstift auf der Kurve hin- und auf einer Geraden zurückgeführt wird. Die Multiplikation der Kurvenordinate mit dem Sinus oder Kosinus eines Vielfachen der Abszisse, wie sie bei den höheren Koeffizienten erforderlich ist, geschieht dadurch, daß ein Zahnradchen zwischen den Wagen, der den Fahrstift trägt, und den Fahrarm des Planimeters zwischengeschaltet wird. Für jedes Vielfache ist ein eigenes Zahnradchen erforderlich. III. Aufstellung des Analysators. IV. Behandlung und Pflege des Instruments. V. Beispiel. *Schrutka (Wien).*

Jellinek, St.: Neuere Geräte zum Zeichnen von Kurven. Z. Instrumentenkde **51**, 187—197 (1931).

In der vorliegenden Arbeit werden insgesamt 35 Patentschriften zitiert und die Grundlagen der Geräte kurz angegeben. Auf konstruktive Einzelheiten wird nicht eingegangen, da sie zum Teil nicht die zweckmäßigste Lösung darstellen, auch wird nicht erörtert, wie weit die theoretischen Voraussetzungen bei den Instrumenten erfüllt werden. In der Hauptsache handelt es sich um Kegelschnittzeichner, von denen einige durch Prinzipskizzen und Beschreibung etwas eingehender erläutert werden. Außer diesen Instrumenten wird noch ein Gerät zum Zeichnen von Kreisevolventen beschrieben. *G. Koehler (Darmstadt).*

Geometrie.

● **Godeaux, Lucien:** *La géométrie.* (Bibliothèque scient. belge. Sect. math.) Paris: Hermann & Cie 1931. 181 S. Frs. 15.—.

Haag, F.: *Zwei Aufgaben.* Z. Kristallogr. usw. A 77, 345—352 (1931).

I. Ein quadratisches Netz in ein Netz mit gegebener Diagonale der neuen Masche zu verwandeln. II. Ein kubisches Gitter in ein parallelepipedisches mit gegebener Diagonale des Parallelepipeds zu verwandeln. Autoreferat.

Weaver, James H.: *On a curve associated with a triangle.* Amer. math. Monthly 38, 209—211 (1931).

In the plane of the triangle $A_1 A_2 A_3$ a point P is determined as follows:

$$\angle A_i P A_j = \angle (m\pi + kA_n); \quad (i, j, n = 1, 2, 3; i \neq j \neq n).$$

Transforming by means of: $3m + k = 2$, $A_n = \frac{1}{3}\pi - A'_n$, one obtains:

$$\angle A_i P A_j = \angle (\frac{2}{3}\pi - kA'_n),$$

if k varies, the point P will describe a curve C . The author proves the following theorems:

$$|A'_1| : |A'_2| : |A'_3| = p_1 : p_2 : p_3,$$

where the p are relatively prime integers, the curve C is algebraic and of degree $p_1 + p_2 + p_3$. It has a multiple point of order p_i at A_i and the tangents at this point divide the angular magnitude into $2p_i$ equal parts. There can be no other multiple points on C . O. Bottema (Groningen).

Gheorghiu, Șerban A.: *Über gewisse metrische Relationen.* Gaz. mat. 36, 245 bis 248 (1931) [Rumänisch].

Der Verf. gibt neue Beweise für die bekannten Bedingungen, daß ein Drei- oder ein Viereck dem Kreise C (Mittelpunkt O , Radius R) eingeschrieben und dem Kreise C_1 (Mittelpunkt O_1 , Radius R_1) umgeschrieben sei. Der Beweis benutzt imaginäre Elemente. Es sei A die Potenzlinie des Kreises C und des Nullkreises O_1 . Die Bedingung, daß Dreiecke in C eingeschrieben und um C_1 umgeschrieben existieren, ist: Der Pol S der Geraden A in bezug auf den Kreis C muß eines der Ähnlichkeitszentren der Kreise C und C_1 sein. Verf. gibt auch einen direkten Beweis dieses Satzes ($\overline{OO_1^2} = R^2 \pm 2R \cdot R_1$). Für den Fall der Vierecke ist der Schnittpunkt der Diagonalen ein Grundpunkt des mit den C und C_1 gebildeten Kreisbüschels F . Die gesuchte Bedingung ist: S muß einer der 2 Grundpunkte L oder L' des Kreisbüschels F sein. Ferner

$$OS = \frac{2R^2 \cdot OO_1}{R^2 + \overline{OO_1^2}},$$

wo OL und OL' die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - \frac{R^2 + \overline{OO_1^2} - R_1^2}{\overline{OO_1}} x + R^2 = 0$$

sind, so daß man die bekannte Bedingung

$$(R^2 - \overline{OO_1^2})^2 = 2R_1^2(R^2 + \overline{OO_1^2})^2$$

wieder findet.

N. Abramescu (Cluj).

● **Shorter, L. R.:** *Introduction to Vector analysis, with many fully worked examples and some applications to dynamics and physics.* London: Macmillan & Co., Ltd. 1931. XIV, 356 S. u. 158 Abb. geb. 8/6.

Buhl, A.: *Sur les aires sphéro-coniques de Georges Humbert.* Bull. Sci. math., II. s. 55, 66—74 (1931).

Les conceptions géométriques de G. Humbert (Œuvres, t. I) qui l'ont mené à des résultats élégants, rattachables aux formes spatiales du théorème d'Abel, n'ont pas donné lieu cependant à des développements des continuateurs. L'auteur ne peut citer que R. Hoppe [Arch. d. Math. u. Phys. (2) 9 (1890); F. d. M. 22, 298] et ses propres

recherches sur la formule de Stokes (Ann. de Toulouse depuis 1910). Dans cette note l'auteur s'occupe de la planification d'aires sphériques en utilisant ses formules [Géométrie et Analyse des Intégrales doubles, Scientia **36** (1920)], puis d'aires gauches quelconques. Ils s'introduisent d'équations aux dérivées partielles du 1-er ordre, tant linéaires que non-linéaires. Celles linéaires permettent de planifier des aires gauches par une intéressante construction géométrique, celles non-linéaires permettent d'adjoindre aux surfaces déjà planifiées d'autres dont la planification relève de la même construction. Pour ces dernières on a une théorie analogue à celle des surfaces des ondes de la mécanique ondulatoire (C. r. Acad. Sci. Paris **191**, 545 u. 693). En voici des résultats: Soit un cône OC de sommet O , à directrice fermée quelconque C , transperçant une sphère S de centre (a, b, c) et de rayon R . On considère les deux aires sphéro-coniques σ_2, σ_1 déterminées par OC sur la sphère S . Le contour C étant tracé sur une surface σ d'équation

$$\frac{1}{r^2} - \Omega(x, y) = \frac{1}{4Rc}$$

la projection C' de C sur le plan XOY enfermera une aire plane égale à $\sigma_2 - \sigma_1$. — Une nappe conique de sommet O , déterminant une certaine aire S sur une sphère de centre O et de rayon R , détermine sur toute surface à propriété géométrique $R^2 \cdot \overline{OT} = \overline{QM}^2$, un contour C dont la projection C' sur XOY enferme une aire plane équivalente à l'aire sphérique S . D. Sintzov (Charkov).

Gambier, Bertrand: Propriétés quadratiques et leurs cas d'exception. Cycles tangents dans le plan ou paratactiques dans l'espace. Bull. Sci. math., II. s. 55, 75—96 (1931).

Der Verf. knüpft an einen Satz über Zykel in der Ebene an, der von D. Barbilian (Bull. de Math. et de Phys. de l'École polyt. de Bucarest, I, 1929, S. 1—17) angegeben und von G. Tzitzéica (ebenda, S. 18—21) durch Zurückführung auf gewisse quadratische Relationen zu einem Satz über Punktgruppen auf einer n -dimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeit in einem linearen Raum von $n+1$ Dimensionen erweitert wurde. Diese Erweiterung kann verschiedenartig u. a. im euklidischen R_3 gedeutet und spezialisiert werden. Es existiert nun im allgemeinen ein Ausnahmefall, der für $n=4$ (und nur hierfür) zur Regel wird. Liniengeometrisch gedeutet, liefert dies den bekannten Satz von der Schläflischen Doppelsechse. Der zitierte Satz lautet: Irgend vier Zykel A_i , die einen Zykel O berühren (und keinem Zykelkreis angehören), besitzen zu je dreien außer O noch einen gemeinsam berührenden Zykel A'_i ($i=1, 2, 3, 4$). Die Zykel A'_i besitzen im allgemeinen keinen gemeinsam berührenden Zykel O' . Jedreier der A'_i berühren aber (abgesehen von einem der Zykel A_i) abermals einen Zykel A''_i . Die vier so entstehenden Zykel A''_i berühren stets einen und denselben Zykel O'' . Für das Eintreten des Ausnahmefalls, also für die Existenz von O' , ist notwendig und hinreichend, daß die vier Berührungspunkte der A_i auf O ein äquianharmonisches Doppelverhältnis bestimmen, so daß die A_i in diesem Fall nicht durchwegs reell sein können. Die damit gekennzeichneten Zykelkonfigurationen der Ebene werden mit Hilfe der Minimalprojektion in Punkt-Konfigurationen des R_3 transformiert und hieraus ein einfacher (von H. Robert) angegebener Beweis des allgemeinen Teils dieses Satzes abgeleitet. Ferner ergibt sich durch zweckmäßige Vereinfachung (Inversion) und Betrachtung eines Grenzüberganges die Notwendigkeit des Bestehens der Barbilianschen Bedingung für den erwähnten Ausnahmefall. Bei diesem besteht die entsprechende Raumfigur bloß aus 10 Punkten, von denen jeder mit 4 anderen auf je einer Minimalgeraden liegt. Weil irgend zwei solche Figuren durch eine endliche Anzahl von konformen Transformationen zur Deckung gelangen, können alle Zykelfiguren des Ausnahmefalls aus einer solchen durch Spiegelungen an Zykelkugeln erzeugt werden, die aus Inversionen und Dilatationen zusammensetzbar sind (vgl. E. Müller-J. L. Krames, Die Zyklographie, Nr. 30, Leipzig und Wien 1929). Die Schnittwinkel der Zykel einer derartigen Figur und die Doppelverhältnisse ihrer Berührungspunkte auf jedem dieser Zykel sind daher stets dieselben. In der Folge wird nachgewiesen,

daß der Satz von Barbilian auch für Zykel (or. Kreise) des Raumes gültig bleibt, sofern der Begriff „berührende Zykel der Ebene“ durch den Begriff „parataktische Zykel des Raumes“ ersetzt wird. Der Ausnahmefall kann dann u. a. auch mit 10 reellen Raumzykeln hergestellt werden, von denen jeder zu 4 anderen parataktisch ist. Der Winkel der Parataxie ist dabei jedesmal $= \pi/3$. Zum Schluß wird noch die Übertragung aller Überlegungen auf den Raum R_n von beliebiger Dimension angedeutet, wobei jeder orientierten Hypersphäre des R_{n-1} ein Punkt des R_n zugeordnet wird, und zwar so, daß 2 einander berührende or. Hypersphären Bildpunkte besitzen, die einer Minimalgeraden angehören.

J. L. Krames (Brünn).

Sharpe, F. R.: A variety representing pairs of points of space. Amer. J. Math. 53, 358—360 (1931).

Vermöge der Transformation $g_{ij} = x_i y_j + x_j y_i$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$), wobei die x_i und y_i homogene Koordinaten zweier Punkte X und Y sind, entspricht jedem Punktepaar X, Y im R_3 ein Punkt P im R_9 der homogenen Koordinaten g_{ij} . Es wird auf einfache Art durch Rechnen mit Identitäten bewiesen: 1. Sind X und Y frei veränderlich, so erfüllen die P eine sechsdimensionale rationale Mannigfaltigkeit im R_9 . 2. Sind X und Y einander entsprechende Punkte einer allgemeinen kubischen Involution, so erfüllen die P eine dreidimensionale rationale Mannigfaltigkeit im R_9 . 3. Die Gesamtheit der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte dieser Involution wird ebenfalls durch ein dreidimensionales Kontinuum dargestellt und die Gleichung dieses Geradenkomplexes in Linienkoordinaten durch einen einfachen Eliminationsprozeß erhalten.

Ruth Moufang (Frankfurt a. M.).

Delens, Paul: Congruences de courbes et figuration des invariants. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 791—794 (1931).

L'A. continuando i suoi studi sulle congruenze di curve e in particolare sulle congruenze isocline (e) relative ad una data congruenza (a), determina inversamente le congruenze relative ad un dato campo di vettori a divergenza nulla; e dimostra che tutti i campi di vettori unitari corrispondenti ad uno stesso campo di vettori (e), si deducono da uno di questi mediante una rotazione arbitraria. Si ha così una notevole ed elegante generalizzazione di classici risultati della Astatica, e che conduce l'A. a considerare, con chiaro significato della parola, ciò che egli chiama la deformazione astatica dei campi della congruenza (a), ed i relativi invarianti astatici. L'A. quindi pone, senza approfondirlo, il problema della determinazione di una congruenza corrispondente al campo dei vettori considerati da Weatherburn, cioè della integrazione della

$$a \operatorname{div} a + a \wedge \operatorname{rot} a = -w.$$

Si danno infine delle formule per la rappresentazione della div e del rot di un vettore, di cui l'A. accenna qualche applicazione allo studio delle congruenze isoterme, armoniche, isotrope, ecc., in relazione con altri lavori di Ribaucour, Bouligand, Alayrac.

R. Marcolongo (Napoli).

Doubnoff, J.: Sur les tenseurs fondamentaux d'une congruence rectiligne. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 399—401 (1931).

Eine Strahlenkongruenz ist durch $a = a(u^1, u^2)$, $a^* = a^*(u^1, u^2)$ gegeben, wo a der Einheitsvektor einer Geraden und a^* sein Moment bezüglich eines Punktes ist. Bezeichnet man die Ableitungen nach u^i durch untere Indizes, so sind im Raume der u^i $g_{ij} = a_i a_j$, $l_{ij} = (a_i a_j)$, $\beta_i = a^* a_i$ Tensoren, wobei die l_{ij} (bis aufs Vorzeichen) durch die g_{ij} bestimmt sind. g_{ij} werde als Grundtensor im Riccikalcul gewählt. Bildet man dann $b_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{i,j} + \beta_{j,i})$ — die Indizes hinter dem Komma bedeuten kovariante Ableitungen —, so gilt umgekehrt: Gibt man die symmetrischen Tensoren $g_{ij}(u^1, u^2)$, $b_{ij}(u^1, u^2)$ so, daß die g_{ij} die Krümmung 1 haben und daß $l^{ij} l^{\alpha\beta} b_{j\alpha, \beta i} = g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$ ist, so bestimmen g_{ij} , b_{ij} eine Kongruenz bis auf Bewegungen; diese Tensoren entsprechen der Sanniaschen Theorie. Betrachtet man eine Schnittfläche $r = r(u^1, u^2)$ einer gegebenen Kongruenz, so kann man noch die Tensoren $c_{ij}^* = a_i r_j$ bilden. Umgekehrt ist durch Angabe des

symmetrischen Tensoren g_{ij} von der Krümmung 1 und der c_{ij}^* die Kongruenz samt der Schnittfläche bis auf Bewegungen bestimmt, wenn $g^{ij}l^{\alpha\beta}c_{j\alpha,\beta i}^* = l^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}^*$ gilt. Anstatt c_{ij}^* kann man auch $c_{ij} = c_{ij}^* + c_{ji}^*$ samt einer Invarianten φ geben, für die

$$\Delta_2 \varphi + \varphi = g^{ij}l^{\alpha\beta}c_{j\alpha,\beta i}$$

erfüllt ist; diese Tensoren entsprechen der Kummerschen Theorie. Der Verf. bringt dann einige Anwendungen hiervon und gibt schließlich an, wie man diese Methode auf Komplexe ausdehnen kann.

Mayrhofer (Wien).

Moody, Ethel Isabel: A Cremona group of order thirty-two of cubic transformations in three-dimensional space. Amer. J. Math. 53, 460—474 (1931).

Der Ursprung dieser Arbeit ist in einer Abhandlung von D. Montesano zu suchen: Su alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio [Atti Ist. Veneto (6) 6, 1425—1444 (1888)]. In einem Raum S_5 wird jede Hyperfläche H 2. Grades mit der Gleichung $\sum h_i z_i^2 = 0$ ($i = 1, \dots, 6$) von den involutorischen Kollineationen einer Gruppe G_{32} in sich transformiert: es sind dies die involutorischen Kollineationen, die das gemeinsame Polsimplex all jener Hyperflächen invariant lassen. Die stereographische Projektion von H auf ein S_4 gibt eine Gruppe G_{32} involutorischer quadratischer Transformationen im Raume S_4 . Zwei Hyperflächen wie H haben eine V_3^4 gemein, deren stereographische Projektion auf S_4 eine V_3^3 mit 4 Doppelpunkten ist; die Projektion einer solchen V_3^3 von einem ihrer Doppelpunkte aus auf ein S_3 führt zu einer Gruppe G_{32} von kubischen Cremona-Transformationen im Raume S_3 . Die Eigenschaften dieser Gruppe sind von Montesano geometrisch gefunden worden. E. I. Moody gibt die Gleichungen der verschiedenen Transformationen beider Gruppen an und gibt die analytischen Beweise vieler Sätze von Montesano. Togliatti (Genova).

Vranceanu, G.: Sur quelques théorèmes relatifs aux variétés non holonomes et aux systèmes de formes de Pfaff. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 721—724 (1931).

Es sei $\omega_1, \dots, \omega_m; \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{n-m}$ ein System von n unabhängigen Pfaffschen Formen in n Veränderlichen x^r . Setzt man $\bar{\omega}_1 = \dots = \bar{\omega}_{n-m} = 0$, $ds^2 = \omega_1^2 + \dots + \omega_m^2$ so hat man eine (im allgemeinen) nicht holonome Mannigfaltigkeit V_n^m mit der Metrik ds^2 , deren invariante Eigenschaften in bezug auf alle (mit in den x^r veränderlichen Koeffizienten) orthogonalen Substitutionen der ω und nichtsingulären linearen Transformationen der $\bar{\omega}$ betrachtet werden. Im vorliegenden Bericht teilt der Verfasser mit, daß die maximale Parameteranzahl der Gruppe der Deformationen einer solchen V_n^m mit der kleinsten in den Gleichungen $\bar{\omega} = 0$ und in der Metrik ds^2 durch Punkttransformationen erreichbaren Anzahl der Veränderlichen in enger Beziehung steht. Die Methoden zur Bestimmung der (k. e. A. d. V., d. h.) kleinsten erreichbaren Anzahl der Veränderlichen in den $\bar{\omega} = 0$ sind klassisch. Nach einem Satze des Verf. kann die in der Metrik ds^2 k. e. A. d. V. (ebenfalls) als diejenige der linear unabhängigen Gleichungen eines vom Verf. angegebenen, vollständig integrierbaren Gleichungssystems bestimmt werden. Über die maximale Parameteranzahl der Gruppe der Deformationen einer V_n^m gibt der Verf. 3 interessante, unter gewissen einschränkenden Bedingungen geltende Sätze im Falle einer V_n^2 ($n \geq 4$), V_5^3 , V_n^m an. Im Zusammenhange mit diesen Ergebnissen wird ein Satz mitgeteilt, nach dem die, in einem gegebenen Systeme von Pfaffschen Formen, durch Punkttransformationen k. e. A. d. V. bestimmt werden kann.

O. Borůvka (Brno).

Yerushalmy, Jacob: Construction of pencils of equianharmonic cubics. Amer. J. Math. 53, 319—332 (1931).

Die Büschel ebener Kurven 3. Ordnung mit konstantem Doppelverhältnis sind von O. Chisini bestimmt worden [Rend. Palermo 41, 59—93 (1916)]; er geht von der Bemerkung aus, daß die ∞^2 -Kurven 3. Ordnung, die durch 7 beliebige von den 9 Basispunkten des Büschels hindurchgehen, wenn sie projektiv auf den Geraden einer anderen Ebene π abgebildet werden, zu einer algebraischen Transformation (1, 2) zwischen den beiden Ebenen führen, welche die Kurven des Büschels in die Geraden eines Büschels transformieren, derart, daß alle diese Geraden eine C^4 (die Übergangskurve der Doppel-

ebene π) in Gruppen von je 4 Punkten mit konstantem Doppelverhältnisse schneiden. Im Falle eines Büschels äquianharmonischer Kurven 3. Ordnung hat jene C^4 notwendig die Gleichungsform:

$$f_4 = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} \cdot \varphi_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right)^2 = 0,$$

wo $\varphi_3(x_1, x_2, x_3)$ ein beliebiges Polynom 3. Grades bedeutet. Die Geraden des Büschels sind die Geraden $x_2 = \lambda x_1$. In der vorliegenden Arbeit wird die Ebene π als Doppelbildebene folgender Fläche F 3. Ordnung betrachtet:

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} x_4^2 + \sqrt{2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} x_4 + \varphi_3 = 0;$$

das geschieht durch Projektion aus dem Punkte (0001). Der Umriss der Fläche F ist die Kurve $f_4 = 0$. Die Fläche wird durch eine zyklische Homologie 3. Ordnung mit $x_4 = 0$ als Doppelpunktsebene und mit dem Punkt $K \left(001 \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$ als Zentrum in sich transformiert. Es folgt daraus, daß jede Ebene durch K eine Kurve auf F ausschneidet, welche eine zyklische Homologie 3. Ordnung in sich gestattet und also äquianharmonisch ist. Jedes Büschel äquianharmonischer Kurven 3. Ordnung ist also in einem Netz solcher Kurven enthalten; das Netz hat nur 6 Basispunkte. In der gewöhnlichen Abbildung der Fläche F auf eine Ebene, in welcher den ebenen Schnitten von F Kurven 3. Ordnung durch 6 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 entsprechen, sind die 6 Punkte besonders zu wählen. Man kann von einer beliebigen Kurve 3. Ordnung φ ausgehen; die 6 Punkte sind dann die Spitzen von 2 der Kurve φ ein- und umgeschriebenen Dreiecke 123, 456, derart, daß die Geraden 12, 23, 31; 45, 56, 64 die Kurve φ in den Punkten 2, 3, 1; 4, 5, 6 bzw. berühren und außerdem daß die Kegelschnitte 12456, 23456, 31456; 12345, 12356, 12364 die Kurve φ in den Punkten 1, 2, 3; 5, 6, 4 bzw. berühren. Diese letzten Eigenschaften werden aus der Parameterdarstellung von φ mit dem Abelschen Integral 1. Gattung als Parameter gefunden; es wird am Ende die Konstruktion des Netzes äquianharmonischer C^3 angegeben. Es wird auch eine kanonische Gleichungsform für die Fläche F gegeben (Ende § 6 sind irrtümlich die Koordinaten von K vertauscht).

E. G. Togliatti (Genova).

Piazzolla-Beloch, Margherita: Sulla configurazione delle curve situate sopra una superficie generale del 3° ordine, con 27 rette reali. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 1—20 (1931).

Verf. beschäftigt sich mit den Konfigurationen der Kurvenzüge einer algebraischen Raumkurve, welche zu einer allgemeinen kubischen Fläche mit 27 reellen Geraden gehört. Mit Hilfe der bekannten Abbildung einer kubischen Fläche auf eine Ebene beweist Verf., daß es 3 Arten von paaren Kurvenzügen gibt: solche, für welche 1. alle Geraden der Fläche Parisekanten, 2. 12 Geraden (ein Doppelsechs) Disparisekanten und 3. 16 Geraden der Fläche (jede von diesen schneidet 5 der übrigen) Disparisekanten sind; ferner 3 Arten von unpaaren Kurvenzügen: solche, für welche 1. alle Geraden, 2. 15 Geraden und 3. 11 Geraden der Fläche Disparisekanten sind. Weiter wird gezeigt, daß, wenn auf einer allgemeinen kubischen Fläche mit 27 reellen Geraden eine algebraische Kurve n -ter Ordnung ohne Doppelpunkte gegeben ist, welche paare Züge hat, es 3 komplanare Geraden der Fläche gibt, welche gleichzeitig Parisekanten dieser paaren Züge sind. Die Gesamtzahl der paaren Züge 2. und 3. Art einer algebraischen Kurve n -ter Ordnung ohne Doppelpunkte kann nicht größer sein als $\left[\frac{2}{3} n \right]$ (n gerade) bzw. als $\left[\frac{2}{3} (n-1) \right]$ (n ungerade), und die Zahl der paaren Züge der 3. Art kann nicht größer sein als $\left[\frac{n}{2} \right]$. Mit Hilfe einer kontinuierlichen Deformation der kubischen Fläche

in eine derartige Fläche mit 4 Knotenpunkten zeigt die Verf., daß die genannten oberen Grenzen tatsächlich erreicht werden können. Eine algebraische Kurve ohne Doppelpunkte, welche zu einer kubischen Fläche mit 27 reellen Geraden gehört, kann nicht mehr als 7 unpaare Kurvenzüge haben. Auch diese obere Grenze ist erreichbar.

G. Schaake (Groningen).

Bishara, S.: On properties of a set of Schur quadrics of a cubic surface. J. Lond. math. Soc. 6, 12—15 (1931).

Bekanntlich gehört zu jeder der 36 (aus je 12 der 27 Geraden einer F_3 gebildeten) Doppelsechs eine Schursche F_2 derart, daß die konjugierten Geraden der Doppelsechs reziproke Polaren bezüglich dieser F_2 sind. Nach Sätzen von Cremona [Math. Ann. 13, 303 (1878)] und Kohn [Wien. Sitzgsber. 114, 1443 (1905)] ist jede Doppelsechs syzygetisch (6 Gerade gemeinsam) zu 15 und azygetisch (4 Gerade gemeinsam) zu 20 anderen Doppelsechs. Die vorliegende Arbeit knüpft an Untersuchungen von A. L. Dixon über gewisse Tripel von Schurschen F_2 an. Zu jeder gegebenen Schurschen F_2 gibt es 10 Paare weiterer, die mit ihr zusammen ein Dixon-Tripel bilden. Über die Gruppe der restlichen 15 F_2 werden einige Sätze aufgestellt. Zu bemerken wäre, daß, da jedes Dixon-Tripel zu 3 azygetischen Doppelsechs gehört, die genannten 15 Schurschen F_2 gerade zu jenen 15 Doppelsechs gehören, die zu der zur gegebenen F_2 gehörigen Doppelsechs syzygetisch sind. A. Duschek (Wien).

Wren, T. L.: The sets of 27 points in which a plane cubic curve is met by the lines on cubic surfaces. J. Lond. math. Soc. 6, 16—22 (1931).

Es werden die Gruppen von je 27 Punkten betrachtet, in denen eine gegebene Ebene C_3 von den 27 Geraden einer allgemeinen F_3 durch die C_3 getroffen werden. Aus den vom Verf. für die C_3 vom Geschlecht 1 aufgestellten Relationen zwischen den Punkten derartiger Gruppen folgt, daß zu je 6 Punkten allgemeiner Lage der C_3 je nach der Annahme über die durch diese 6 Punkte gehenden 6 Geraden der F_3 verschiedene, aber stets nur endlich viele Gruppen von 21 Punkten bestimmt sind, die zusammen mit den 6 gegebenen Punkten eine 27er Gruppe der gesuchten Art liefern. So erhält man z. B. 9 verschiedene solche 27er Gruppen, wenn man durch die 6 Punkte 6 zu je zweien windschiefe Gerade der F_3 legt. Legt man dagegen durch 2 der 6 Punkte 2 allgemeine windschiefe Gerade g, g' und zieht von den 4 übrigen Punkten aus die Transversalen von g und g' , so ist (und zwar nur in diesem Fall) die 27er Gruppe eindeutig bestimmt. Für die rationalen C_3 ergibt sich, daß durch 6 Punkte allgemeiner Lage unendlich viele oder eine einzige 27er Gruppe bestimmt ist, je nachdem die C_3 einen Knoten oder Spitze hat. Zum Schluß folgt noch eine Bemerkung über allgemein gegebene Gruppen von 7 Punkten der Ebene, die unter einer bestimmten Annahme über die 7 zugehörigen Geraden der F_3 ein C_3 -Büschel und auf jeder C_3 dieses Büschels eine 27er Gruppe der obigen Art eindeutig bestimmen. A. Duschek (Wien).

Piazzolla-Beloch, Margherita: Multilateri sghembi e curve di genere massimo. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 50—52 (1931).

E noto (Halphen) che una curva sghemba d'ordine n e genere massimo sta su di una quadrica, e risulta intersezione completa con una superficie d'ordine $n/2$ per n pari, ed intersezione residua con una superficie d'ordine $(n+1)/2$ contenente una generatrice della quadrica per n dispari. L'A. esamina i vari modi secondo cui una curva siffatta può degenerare in un n -latero sghembo connesso, ottenendo: 1. n rette di una quadrica non particolarizzata, di cui per n pari $n/2$ appartengono ad un sistema di generatrici della quadrica ed $n/2$ all'altro, mentre per n dispari $(n-1)/2$ di quelle rette appartengono ad un sistema di generatrici ed $(n+1)/2$ all'altro; 2. l'insieme di due multilateri piani dello stesso numero di lati — con l'aggiunta di una retta del piano di uno di essi per n dispari — i due multilateri essendo riferiti in guisa che lati corrispondenti sono incidenti. Come caso ulteriore — omissso dall'A. — si ha per n dispari: 3. l'insieme di due qualsiasi multilateri piani dello stesso numero di lati, con l'aggiunta della retta comune ai loro piani. Beniamino Segre (Roma).

Zariski, Oscar: On the non-existence of curves of order 8 with 16 cusps. Amer. J. Math. 53, 309—318 (1931).

Der Verf. wird in den Ann. of Math. beweisen, daß es nicht immer algebraische Kurven gibt mit gegebenen, nichtnegativen Plückerschen Zahlen, welche den Plückerschen Gleichungen genügen. Z. B. kann eine Kurve 7. Ordnung nicht 11 oder mehr

Rückkehrpunkte haben und eine Kurve 8. Ordnung kann nicht 16 oder mehr Rückkehrpunkte besitzen. Der Beweis hierfür beruht auf folgendem Theorem: „Das lineare System der Kurven $(n-3-\gamma)$ ter Ordnung, welches bestimmt ist durch einfache Grundpunkte in den Rückkehrpunkten einer ebenen irreduziblen algebraischen Kurve, ist regulär (effektive Dimension = virtuelle Dimension) für jeden Wert der ganzen Zahl 4γ , welcher der Relation $6\gamma < n$ genügt.“ Dieses Theorem wird bewiesen mit Hilfe von Betrachtungen aus der Theorie der algebraischen Flächen. — In dieser Mitteilung beweist der Verf. die Nichtexistenz einer Kurve 8. Ordnung mit 16 Rückkehrpunkten auf eine andere Weise; er gebraucht nämlich nur die Elemente der ebenen Geometrie und der Geometrie auf einer algebraischen Kurve. Der Beweis wird gegeben mit Hilfe des Lemmas: „Wenn eine irreduzible Kurve f n -ter Ordnung gegeben ist, welche d Doppelpunkte und k Rückkehrpunkte besitzt, und die Zahl τ der den Plückerischen Gleichungen gemäß bestimmten Doppeltangenten gleich Null ist, so sind die einzigen dualen Singularitäten von f genau gewöhnliche Wendetangenten.“ Hieraus folgt, daß eine Kurve 8. Ordnung mit 16 Rückkehrpunkten genau 16 Wendetangenten besitzen würde; die duale Kurve hätte also genau 16 Rückkehrpunkte. *Schaake.*

Topologie:

Cassina, U.: *Linee, superficie, solidi.* Rend. Semin. mat. e fis. Milano 6, 18—37 (1931).

Verf. gibt eine historisch-kritische Übersicht über die Wandlungen der begrifflichen Fassung der visuell gegebenen Dinge Linie, Fläche, Körper. Die Hauptetappen dieser Entwicklung von den griechischen Mathematikern bis zum Beginn der in der 2. Hälfte des XIX. Jahrhunderts einsetzenden Grundlagenforschung und die Entdeckung derjenigen Erscheinungen, die jeweils die Unvollständigkeit der bisherigen Begriffsbildung erkennen ließen, werden im I. Teil skizziert. Im II. Teil werden die Resultate von Pasch und Peano für den Aufbau der Geometrie auf wenigen Grundbegriffen und die Ausgestaltung der Theorie der Punktmengen von Cantor bis zu modernen Arbeiten (Knaster, Kuratowski, Lennes u. a.), die sich um eine rein mengentheoretische Definition jener Begriffe bemühen, etwas ausführlicher behandelt. Am Schluß bringt der Verf. eine eigene mengentheoretische Definition des ebenfalls in diesen Problemkreis gehörenden Begriffs der Berührung. *Ruth Moufang* (Frankfurt a. M.).

Kiang, Tsai-Han: *On the groups of orientable two-manifolds.* (Dep. of Math., Univ., Princeton.) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 142—144 (1931).

Es wird ein Weg skizziert, die J. Nielsenschen Resultate aus der Topologie der orientierbaren geschlossenen Flächen von der abstrakt durch Erzeugende und Relationen gegebenen Fundamentalgruppe aus (die noch durch Hinzunahme unendlicher Produkte „abgeschlossen“ wird) zu begründen. *Reinhold Baer* (Halle a. S.).

Newman, M. H. A.: *A theorem on periodic transformations of spaces.* Quart. J. Math., Oxford ser. 2, 1—8 (1931).

The object of the paper is to prove that locally Euclidean spaces admit no infinitesimal transformations with an assigned period p , i. e. Theorem I. If M^n is a locally Euclidean metricized connected n -dimensional space, G^n any domain in it, and p an integer greater than 1, there is a positive number d such that no uniform continuous representation of M^n on itself with period p moves every point of G^n a distance less than d . The period of a representation f is the least integer greater than 0 such that $f(x) = x$ for all points x of M^n , where $f(x) = f[f(f \dots f(x) \dots)]$ (p of them). *Autoreferat.*

Vanek, Karl: *Über Zerlegungseigenschaften im kleinen zusammenhängender Kurven.* Mh. f. Math. 38, 5—16 (1931).

Nach dem Zerlegungssatz der Dimensionstheorie ist jeder eindimensionale Raum für jedes positive ε Summe von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen $< \varepsilon$, die zu je zweien einen diskontinuierlichen, zu je dreien einen leeren Durchschnitt haben.

Ist nun der Raum speziell ein im kleinen zusammenhängendes, eindimensionales Kontinuum, so zeigt Verf., daß die abgeschlossenen Teilmengen als im kleinen zusammenhängende Kontinua gewählt werden können. *Nöbeling* (Wien).

Whyburn, G. T.: Concerning hereditarily locally connected continua. Amer. J. Math. 53, 374—384 (1931).

Ein Kontinuum K (kompakter, zusammenhängender Raum) heißt erblich im kleinen zusammenhängend (*eikz*), wenn jedes (echte oder unechte) Teilkontinuum von K im kleinen zusammenhängend, also Streckenbild ist. Beispielsweise ist jede reguläre Kurve (d. h. ein Kontinuum, dessen Punkte in beliebig kleinen Umgebungen mit endlich vielen Begrenzungspunkten liegen) ein *eikz*-Kontinuum. Die Umkehrung hiervon gilt nicht. Der Verf. zeigt jedoch, daß jedes *eikz*-Kontinuum eine rationale Kurve ist, d. h. daß jeder Punkt in beliebig kleinen Umgebungen mit höchstens abzählbar vielen Begrenzungspunkten liegt. Es ist also jede der 3 folgenden Klassen von Kontinua eine echte Teilklasse der folgenden: reguläre Kurven, erblich im kleinen zusammenhängende Kontinua, rationale Kurven. Im Verlaufe des Beweises werden einige für die *eikz*-Kontinua charakteristische Eigenschaften formuliert.

Nöbeling (Wien).

Whyburn, G. T.: The cyclic and higher connectivity of locally connected spaces. Amer. J. Math. 53, 427—442 (1931).

Es werden zusammenhängende, im kleinen zusammenhängende, separable, metrische Räume M untersucht. Versteht man dann unter einem Gebiet in M eine in M offene, zusammenhängende Menge, unter einem M zerfallenden Punkt (cut-point) einen Punkt derart, daß nach seiner Beseitigung ein nicht zusammenhängender Raum übrig bleibt, schließlich unter einem Endpunkt von M einen solchen Punkt, der Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen eines Systems von Umgebungen mit je nur einem Randpunkt einschließbar ist, so gilt: der Punkt p von M ist dann und nur dann Endpunkt von M , wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist: 1. Es gibt keine zwei Gebiete derart, daß der Durchschnitt ihrer abgeschlossenen Hüllen genau der Punkt p ist; 2. p ist für keine zusammenhängende Teilmenge N von M ein N zerfallender Punkt. Versteht man unter einem lokalen Endpunkt von M einen Punkt, zu dem es wenigstens ein Gebiet in M gibt, dessen Endpunkt er ist, so kann man die lokalen Endpunkte ähnlich wie die Endpunkte charakterisieren und es gilt schließlich: ist M ein Raum ohne ihn zerfallende Punkte, a und b Punkte aus M , die keine lokalen Endpunkte sind, dann gibt es zwei Gebiete R_1 und R_2 derart, daß der Durchschnitt ihrer abgeschlossenen Hüllen genau aus a und b besteht, und daß weiter die Vereinigung von R_i mit a und b im kleinen zusammenhängend ist. *Reinhold Baer* (Halle a. S.).

Popruženko, G.: Sur la dimension de l'espace et l'extension des fonctions continues. Mh. f. Math. 38, 129—138 (1931).

Dann und nur dann hat der separable, metrische Raum E höchstens die Dimension n , wenn es zu jeder in E abgeschlossenen Menge P und jeder auf P definierten, stetigen, reellwertigen Funktion $f(p)$ eine reellwertige, in ganz E definierte Funktion $\Phi(p)$ gibt, so daß 1. die Menge der Unstetigkeiten von $\Phi(p)$ höchstens die Dimension $n - 1$ hat, 2. $f(p) = \Phi(p)$ für alle Punkte p aus P und 3. $f(P) = \Phi(E)$ gilt. — Ersichtlich läßt sich dieser Satz auch zur Definition der Dimension benutzen; insbesondere ist für die nulldimensionalen Räume charakteristisch, daß man die 2. und 3. erfüllende Funktion Φ stets stetig auswählen kann. *Reinhold Baer* (Halle a. S.).

Wilson, Wallace Alvin: On semi-metric spaces. Amer. J. Math. 53, 361—373 (1931).

Eine Menge R von Elementen a, b, \dots heißt (nach Menger) ein halbmetrischer Raum, wenn je 2 Elementen a, b ein Abstand $ab = ba \geq 0$ zugeordnet ist, der nur dann verschwindet, wenn $a = b$ ist. Die Elemente a, b, \dots heißen Punkte. Gilt für je 3 Punkte a, b, c die Dreiecksungleichung $ac + bc \geq ab$, so heißt R metrisch. Der Verf. untersucht halbmetrische Räume, in denen statt der Dreiecksungleichung das schwächere Axiom gilt: A . Für jeden Punkt a und jedes $k > 0$ existiert ein $r > 0$, so daß, wenn

b ein Punkt mit $ab \geq k$ und c ein beliebiger Punkt ist, die Ungleichung $ac + bc \leq r$ gilt. Verf. zeigt, daß ein halbmétrischer Raum R , in welchem das Axiom A gilt, mit einem métrischen Raum homöomorph ist, daß also mit anderen Worten in R eine neue, der Dreiecksungleichung genügende Metrik \overline{ab} so eingeführt werden kann, daß für einen Punkt a und eine Punktfolge a_n dann und nur dann $\overline{aa_n} \rightarrow 0$ gilt, wenn $aa_n \rightarrow 0$ gilt. Dieser Satz gewinnt an Interesse durch folgenden Zusammenhang: Es sei Z ein beliebiger métrischer Raum und die Zerlegung $Z = \sum X$ in abgeschlossene, paarweise fremde Teilmengen X sei oberhalb-stetig, d. h. es gibt zu jeder Menge X und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß jede Menge X' , die von X einen Abstand $XX' (= \text{unt. Gr. } xx') \leq \delta$ hat, in der ε -Umgebung von X liegt. Verf. zeigt, daß die Menge $x \subset X, x' \subset X$ aller X durch die Metrik XX' zu einem halbmétrischen Raume wird, in welchem das Axiom A gilt. Hieraus und dem obigen folgt der bekannte Satz, daß die Mengen X nach Einführung einer geeigneten Metrik einen métrischen Hyperraum bilden. Verf. stellt weiterhin einige Untersuchungen über Beziehungen zwischen métrischen und topologischen Räumen an.

Nöbeling (Wien).

Mechanik.

Williams, K. P.: Note on the constants of the disturbing function. Amer. J. Math. 53, 274 (1931).

Got, Th.: Les équations de la mécanique analytique et les notations vectorielles (théorème de d'Alembert, équations de M. Appell, principe de Gauss, équations de Lagrange). Bull. Sci. math., II. s. 55, 42—47 (1931).

Es wird das d'Alembertsche Prinzip für Systeme von Massenpunkten in vektorieller Form geschrieben und aus ihm auf einfache Weise das Gauss'sche Prinzip, die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art sowie die Appellschen Bewegungsgleichungen abgeleitet. Das Verfahren ist auch für nichtholonom-rheonome Nebenbedingungen anwendbar.

Nordheim (Göttingen).

Le Roux, J.: Sur les invariants du groupe des mouvements relatifs. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 871—873 (1931).

Es wird gezeigt, daß die bekannten Transformationsgruppen der Verschiebungen, Translationen (zeitabhängig) und Drehungen die einzigen sind, die ein allgemeines System von Massenpunkten zuläßt.

Nordheim (Göttingen).

Hagihara, Yusuke: A theorem concerning the dynamical systems with slow variation. (Astron. Observ., Azabu, Tokyo.) Proc. imp. Acad. (Tokyo) 7, 44—47 (1931).

Manche dynamische Probleme haben die Eigenschaft, daß ihre Lösungen, wenn man sie in bestimmter Weise in Reihen entwickelt, das dynamische Verhalten des Problems nicht hinreichend genau charakterisieren, falls man nicht eine unverhältnismäßig große Anzahl von Gliedern verwendet. Reihenentwicklungen dieser Art sind praktisch unbrauchbar, selbst wenn ihre Konvergenz vom Standpunkt der Analysis feststeht. Daher zieht man es vor, divergente Reihen zu verwenden, deren erste Glieder jedoch das dynamische Verhalten hinreichend genau abbilden (H. Poincaré, Mécanique céleste, Bd. II, 1893). — Solche Reihenentwicklungen wurden von G. D. Birkhoff [Amer. J. Math. 49 (1927)] betrachtet, und zwar in der Umgebung einer Gleichgewichtslage eines dynamischen Problems. Verf. setzt diese Untersuchungen fort. Es möge ein dyn. Probl. in den $2(m+n)$ canon. Variablen x_i, y_i, ξ_j, η_j und t vorgelegt sein ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$)

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

dessen Hamiltonfunktion $H(x, y, \xi, \eta, t)$ samt seinen ersten, partiellen Ableitungen nach irgendeiner der Variablen in einem Bereich

$$|x_i|, |y_i| < D \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

(D positive, endliche Konstante) den Lipschitz-Bedingungen für beliebige Werte der Variablen ξ_j, η_j, t genügen möge, und für das

$$x_i = y_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\xi_j = A_j, \quad \eta_j = B_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(A_j und B_j willk. Konst.) eine Gleichgewichtslage bilden möge. — Unter diesen Voraussetzungen ist H im Bereich D in der Form

$$H = \sum_{kl} (a_{kl} x_k x_l + b_{kl} x_k y_l + c_{kl} y_k y_l) + H_1(x, y, \xi, \eta, t)$$

darstellbar, wo $a_{kl} = a_{lk}$, $c_{kl} = c_{lk}$ und H_1 eine nach Potenzen von x und y fortschreitende Reihe (beginnend mit dem dritten Grad) darstellt, deren Koeffizienten für alle Werte von ξ, η, t den Lipschitz-Bedingungen genügen. — Während bei Birkhoff der Fall betrachtet wurde, daß die charakt. Gleichung, die man aus dem quadratischen Teil von H entnimmt, lauter verschiedene, nicht verschwindende und nicht durch linear homogene Relationen mit rationalen Koeffizienten verbundene Wurzeln besitzt, geht Verf. von der Annahme aus, daß eine Anzahl von Wurzeln der charakt. Gleichung, wenigstens in erster Annäherung, verschwindet. — Unter diesen (und einigen weiteren, vereinfachenden) Voraussetzungen wird nun gezeigt, wie man in der Umgebung der Gleichgewichtslage zu einer Reihenentwicklung der Lösung gelangen kann, die in einem gewissen Zeitintervall das Verhalten des Systems mit hinreichender Genauigkeit wiedergibt.

E. Schumfner (Wien).

Akimoff, Michael: Über einen Fall der Bewegung eines schweren Punktes auf einer rauhen schiefen Schraubenfläche. *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 74–75 (1931).

Die Bewegungsgleichungen werden in Zylinderkoordinaten aufgestellt, wobei als Kräfte die Schwere, die Reaktionskraft der Fläche, und eine ihr proportionale Reibungskraft angenommen werden. Es ergibt sich dann, daß eine Bewegung in einer gewöhnlichen Schraubenlinie ($r = r_0$) nur dann möglich ist, wenn der Reibungskoeffizient einen speziellen Wert (Funktion von r_0 und der Konstanten der Fläche) hat. Diese Bewegung findet mit konstanter Geschwindigkeit statt, und ist außerdem stabil, wie durch Betrachtung der kleinen Schwingungen gezeigt wird. *Doermann* (New York).

Field, Peter: On the unsymmetrical top. *Acta Math.* (Uppsala) **56**, 355–362 (1931).

This paper is concerned with a case of the problem of the unsymmetrical top, related to the type considered by N. Kowalewski in 1908. One point of the top is supposed fixed, and gravity is supposed to be the only extraneous force. Denoting the principal moments of inertia at the fixed point by I_1, I_2 , and I_3 , the case is characterised by the conditions that $I_3^2 = 2 I_1 I_2$, that the projection of the angular momentum on the vertical is zero, and that the constant of energy has a certain value. When these conditions are satisfied, the complete solution can be expressed in terms of elliptic integrals: geometrically, the motion can be represented by the rolling of a cone fixed in the body on an equal cone fixed in space, whose axis is horizontal. *Whittaker*.

● **Föppl, Otto:** Grundzüge der technischen Schwingungslehre. 2. verb. u. erg. Aufl. Berlin: Julius Springer 1931. VI, 212 S. u. 140 Abb. RM. 8.25.

In anschaulicher Weise führt der Verf. in die Lehre von den mechanischen Schwingungen ein. Ausgehend von den freien Schwingungen eingliedriger Schwingungsanordnungen behandelt der Verf. die der n -gliedrigen Anordnungen. Der Bewegungszustand der letzteren ist an sich durch ein System von n Differentialgleichungen 2. Ordnung 1. Grades mit konstanten Koeffizienten bestimmt, und die Säkulargleichung dieses Systems liefert eine Gleichung n -ten Grades in ω^2 , dem Quadrat der Kreisfrequenz. Da nun die numerische Bestimmung von ω^2 hieraus besonders bei großem n nicht

immer erfreulich ist, schildert der Verf. den in der Praxis häufig begangenen Weg, der vom mechanischen Problem selbst ausgeht ohne formale Aufstellung der Differentialgleichung: Die n -gliedrige Schwingungsanordnung wird mit Hilfe sukzessiver Annäherung durch ein gleichwertiges System von n eingliedrigen Schwingungsanordnungen ersetzt, und deren Frequenzen werden nunmehr bestimmt. Dies Verfahren liefert bequem die Schwingung 1. Ordnung (d. h. den kleinsten Wert von ω), konvergiert jedoch nicht immer bei Bestimmung der höheren Werte von ω . Das 3. Kapitel erörtert „unendlich vielgliedrige“ Schwingungsanordnungen, d. h. die Schwingungen der Kontinua mit Einschränkung auf eindimensionale Probleme, während im nächsten Kapitel rein anschaulich allgemeine Wellenbewegungen behandelt werden. Die erzwungenen Schwingungen und der Einfluß der Dämpfung, wobei der Hinweis auf die durch die Karman-Wirbel hervorgerufenen Schwingungen von Seilen interessieren dürfte, besondere Koppelschwingungen, Pseudoschwingungen, Werkstofffragen und der Massenausgleich werden in den weiteren 5 Kapiteln behandelt. Insgesamt ein Büchlein, das den Ingenieur anschaulich in das Gebiet der mechanischen Schwingungen einführt, den Mathematiker aber über die mathematischen Bedürfnisse des Schwingungstheoretikers unterrichtet.

W. Meyer zur Capellen (Koborn, Mosel).

Federhofer, Karl: Zur graphischen Dynamik des zwangläufigen ebenen Systems. Mh. f. Math. 38, 123—128 (1931).

Zunächst wird ein neuer Beweis gegeben für den von Th. Pöschl herrührenden Satz: „Die Kräfte, welche bei gegebenem Momentanpol O und gegebener Winkelgeschwindigkeit ω einer ebenen kompl. bewegten Scheibe einen bestimmten Punkt J als Wendepol erzeugen, bilden ein geradlinig begrenztes Kraftbüschel, dessen Mittelpunkt T so auf der Geraden durch J und den Scheibenschwerpunkt S liegt, daß $ES \cdot ST = i^2$ wird, wo E der zweite Schnittpunkt von JS mit dem Wendekreis ist und i den Trägheitshalbmesser der Scheibe für den Schwerpunkt bedeutet. Die Begrenzungslinie des nach S reduzierten Kraftbüschels geht durch J und steht senkrecht auf OS .“ Auch das System der Trägheitskräfte einer Scheibe bei vorgegebenem Wendepol ist ein solches geradlinig begrenztes Kraftbüschel mit dem Mittelpunkt T , dem Trägheitspol. Auf Grund dieser Beziehungen wird eine Konstruktion der Führungsdrücke und des Beschleunigungspols einer in 2 Punkten A und B geführten Scheibe entwickelt, wenn die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen von A und B , der momentane Geschwindigkeitszustand und die auf die Scheibe wirkende äußere Kraft P bekannt sind. Durch die Führungen werden der Pol O und der Wendepol J in bekannter Weise festgelegt, aus Wendepol und Scheibenschwerpunkt kann der Trägheitspol T bestimmt werden. Die Resultante der beiden Führungsdrücke geht durch O , die Trägheitskraft der Scheibe durch T , beide Kräfte müssen sich in einem Punkte A der Wirkungslinie von P schneiden. Zerlegt man die nach S reduzierte Kraft $P/m\omega^2$ (m ist die Scheibenmasse) in 2 Komponenten parallel zu TA und OA , so muß der Endpunkt der ersteren auf der Senkrechten zu OS durch J liegen. Hierdurch wird der Punkt A und damit die Führungsdrücke sowie die Trägheitskraft und die Schwerpunktsbeschleunigung der Scheibe bestimmt.

Präger (Göttingen).

Ising, Gustaf: Natürliche Empfindlichkeitsgrenzen bei Meßinstrumenten. I. Allgemeines. Die Empfindlichkeitsgrenze der Waage. (Phys. Inst., Univ. Stockholm.) Ann. Physik, V. F. 8, 905—910 (1931).

Es wird die durch Brownsche Schwankungen gegebene natürliche Empfindlichkeitsgrenze von Meßinstrumenten betrachtet. Aus der Beziehung $\frac{1}{2} A \bar{x}^2 = \varepsilon$, wo A die zugehörige Direktionskraft, x die allgemeine Koordinate der Bewegung und ε die molekulare Energie pro Freiheitsgrad bedeuten, läßt sich der quadratische Mittelwert $\sqrt{\bar{x}^2} = \bar{x}$ bestimmen. Entsprechend läßt sich aus der durch $\delta x / \delta q$ bestimmten Empfindlichkeit s , die auch als Quotient aus Direktionskraft A und „Direktionsfaktor“ B geschrieben werden kann (δq die von außen hervorgerufene Änderung der zu messenden Größe, δx der dadurch hervorgerufene Ausschlag), der Wert $\delta \bar{q}$ bestimmen. Als Anwendung wird ein Ausdruck für die Empfindlichkeitsgrenze der Waage abgeleitet.

Meyer zur Capellen (Koborn, Mosel).

Ising, Gustaf: Natürliche Empfindlichkeitsgrenzen bei Meßinstrumenten. II. Die Empfindlichkeitsgrenze des Galvanometers bei verschiedener Dämpfung. (*Phys. Inst., Univ. Stockholm.*) Ann. Physik, V. F. 8, 911—928 (1931).

In Fortsetzung der obigen Abhandlung werden auf Grund der Bewegungsgleichung des Galvanometers Formeln für die Empfindlichkeitsgrenze bei Strom- und Spannungsmessungen gegeben, wobei mechanische und elektromagnetische Dämpfung berücksichtigt werden, erstere unter Anwendung einer von O. Oberbeck für langgestreckte Ellipsoide angegebenen Annäherungsformel auf den Instrumentenzeiger. Wenn in der Differentialgleichung der Bewegung (Einwirkung der Selbstinduktion vernachlässigt)

$$x''(t) + 2\alpha \cdot x'(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = \frac{B}{K} \cdot i',$$

wo α = Dämpfungsfaktor = $\alpha_1 + \alpha_2$ (mechanische Dämpfung + elektromagnetische), K = Trägheitsmoment, B = Direktionsfaktor = dynamische Galvanometerkonstante, i' = fiktiver Strom, ω = Kreisfrequenz der gedämpften, ω_0 = Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung, gesetzt wird $\alpha = n\omega_0$, $\alpha_1 = n_1\omega_0$ und weiter die „Einstelldauer“ τ eingeführt wird, d. h. die Zeit vom Schließen des Stromes bis der Ausschlag x einen Endwert innerhalb gegebener Toleranzen erreicht hat, so kann der Ausdruck für die natürliche Empfindlichkeit in Abhängigkeit gebracht werden von den Funktionen $\tau/T_0 = f(n)$ (T_0 = Schwingungsdauer) und $f(n)/n - n_1 = \varphi(n, n_1)$. Ist $x = x_0 \cdot x^*(n, t/T_0)$ die Lösung der Differentialgleichung für $i' = 0$ mit entsprechendem Anfangsausschlag x_0 , wobei natürlich die Fälle $n < 1$ (gedämpfte Schwingung, $n = 1$ (kritische Dämpfung), $n > 1$ (aperiodische Dämpfung) unterschieden werden, so kann für vorgegebenes x : x_0 , d. h. bei vorgegebener Toleranz $f(n)$ bestimmt werden aus der transzendenten Gleichung $x^*(n, f) = \pm \text{konst.}$ Im ersteren Fall ist jeweils der größere Wert zu nehmen, außerdem treten hierbei, da ja nur reelle Werte interessieren, diskontinuierliche Lösungen auf, die sich auch bei den in Abhängigkeit von n aufgetragenen Empfindlichkeiten zeigen.

Meyer zur Capellen (Koblenz, Mosel).

Meisser, O., und H. Martin: Beitrag zur Schaffung einer Zeitnormale äußerster Konstanz. (12. Tag. d. Gauver. Thüringen-Sachsen-Schlesien d. Dtsch. Phys. Ges., Dresden, Sitzg. v. 6.—7. I. 1931.) Physik. Z. 32, 233—243 (1931).

Der 1. Teil der Arbeit, der von O. Meißer geschrieben ist, behandelt das Pendel als Zeitnormale und bespricht vor allem die verschiedenen Fehlermöglichkeiten bei Zeitmessungen mit freischwingendem Pendel. Hierbei werden folgende Punkte erwähnt: 1. Die Schneidenverlagerung. M. weist darauf hin, daß dieser Fehler durch die Verwendung eines Minimumpendels nach Schuler praktisch beseitigt werden kann. Die Minimumbedingung hierfür lautet: $2s = 1$, wenn s der Trägheitsradius um den Schwerpunkt und l die mathematische Pendellänge ist. 2. Der Krümmungsradius der Schneide. Dieser geht auch in die Schwingungszeit des Minimumpendels ein. Die Formeln hierfür sind bereits von Bessel abgeleitet. 3. Die Fehler, die durch Massenverlagerungen am Pendel entstehen, z. B. durch ein „Wackeln“ des angebrachten Spiegels. 4. Der Amplitudenfehler. Er muß rechnerisch auf Grund genauer Amplitudenmessungen beseitigt werden. 5. Der Temperaturfehler. Er ist bei den neuen Pendeln aus Invarstahl oder aus Quarzglas klein. 6. Der Barometereinfluß. Er kann ausgeschaltet werden, indem man das Pendel in ein gasdichtes Gehäuse mit konstantem Gasdrucke setzt. 7. Das Mitschwingen des Gehäuses. Es wird vermieden durch die Anordnung von zwei Pendeln, die mit 180° Phasenverschiebung in derselben Ebene schwingen. Die Fehler der horizontalen Bodenbewegungen fallen bei dieser Anordnung ebenfalls heraus. Der 2. Teil der Arbeit ist von H. Martin geschrieben. Er behandelt ein photographisches Koinzidenzverfahren, mit dem man zwei Schwingungsvorgänge bis auf Einheiten der 7. Dezimale in 10 Minuten vergleichen kann.

M. Schuler (Göttingen).

Haag, J.: Sur la réalisation de mécanismes à roulement pur. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 479—480 (1931).

Abramisco, N.: Le mouvement d'une figure plane variable avec conservation de similitude. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 918—920 (1931).

Mehrere zum größten Teil bekannte Beziehungen für die komplane Bewegung eines ebenen, ähnlich veränderlichen Systems werden mitgeteilt (Momentanpol, Polkurven, Beschleunigungszustand, Beschleunigungspol, Krümmungsmittelpunkt einer Bahnkurve, Wendekreis, Gleichenkreis).

Prager (Göttingen).

Batiele, Edgar: Sur les courbes d'équilibre des fils dont les éléments sont soumis à des forces centrales. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1016—1017 (1931).

Die Beziehungen zwischen der Seilkurve und der Kräftekurve einer stetigen Folge von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt werden untersucht. Die aufgeführten Sätze lassen sich unmittelbar aus der Reziprozität beider Figuren herleiten. Prager (Göttingen).

Mechanik der elastisch und plastisch verformbaren Körper.

Reissner, H.: Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen. *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 1—8 (1931).

Mathematische Formulierung des Problems der Eigenspannungen, insbesondere der erforderlichen grundsätzlichen Annahmen. Eigenspannungen (oder Selbstspannungen) sind jene, die in einem starren Körper bei spannungsfreier Oberfläche und bei Abwesenheit von Volumkräften möglich sind. Sie können auftreten, entweder 1. wenn der Verzerrungstensor sich nicht aus einem eindeutigen und stetigen Verschiebungsvektor ableiten läßt, seine Komponenten also nicht den Verträglichkeitsbedingungen genügen, oder 2. wenn die Verschiebungen so groß sind, daß diese Ableitung zwar möglich, aber nicht linear ist, so daß für diese Komponenten die vollständigen Ausdrücke (einschließlich der quadratischen Glieder) anzusetzen sind. Es wird nur Fall 1 betrachtet. — Ursachen für Eigenspannungen sind entweder 1. oberhalb der Elastizitätsgrenze liegende Spannungen, die durch Temperaturunterschiede entstanden sind, oder 2. chemische Vorgänge im Innern des Körpers (Umkristallisationen, Vergütung) oder 3. bleibende Formänderungen durch äußere Belastungen. Die Berechnung der Eigenspannungen ist nur unter der Voraussetzung möglich, daß der Körper nach der bleibenden Formänderung wieder isotrop und homogen mit bestimmten, angebbaren Elastizitätskonstanten E, G, m geworden ist. — Wird durch den Zeiger 0 eine bleibende, die Eigenspannung verursachende Verzerrung bezeichnet, so können die 6 Gleichungen des Hookeschen Gesetzes in der folgenden erweiterten Form geschrieben werden

$$\varepsilon_x = {}^0\varepsilon_x + \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right], \quad \gamma_{yz} = {}^0\gamma_{yz} + \frac{1}{G} \tau_{yz}.$$

Sie besagen: Ein Eigenspannungszustand kann immer aufgefaßt werden als verursacht durch das Zusammenwirken von bleibenden Anfangsdeformationen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ und elastischen Deformationen in einem zusammenhängenden, ursprünglich spannungslosen Körper. — Die Eigenspannungen σ , τ ergeben sich dann als Differenzen der „Anfangs- oder Quellspannungen“ ${}^0\sigma$, ${}^0\tau$ die den „Anfangsdeformationen oder Spannungsquellen“ ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ nach dem Hookeschen Gesetze zugehören und der „fingierten Spannungen“ ${}^+\sigma$, ${}^+\tau$, die den ε , γ bei weggedachten ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ entsprechen. — Die Spannungsquellen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ können aus den durch allmähliche Zerschneidung des betrachteten Körpers ermittelten Eigenspannungen durch Heranziehung der Verträglichkeitsbedingungen berechnet werden. Dadurch ergeben sich 6 voneinander unabhängige lineare, partielle Differentialgleichungen für die 6 Größen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$, denen aber keine Oberflächenbedingungen zugeordnet sind, was mit der willkürlichen Auswahl gleichwertiger Spannungsquellenzustände zusammenhängt. — Der achsensymmetrische Fall wird besonders formuliert und ein Beispiel hierfür angegeben. Den Schluß bilden die anschließenden weiteren Fragestellungen.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Neményi, P.: Selbstspannungen elastischer Gebilde. (*Inst. f. Techn. Strömungsforsch., Techn. Hochsch., Berlin.*) *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 59—70 (1931).

Es wird ein umfassender Bericht über die bisherigen Arbeiten gegeben, die sich auf Selbstspannungszustände in elastischen Körpern beziehen. Besonders eingehend wird berichtet über die Arbeiten von Volterra (Vollerrasche Distorsionen), Colonnetti (Reziprozitätssatz, Erweiterung des Castiglianoschen Prinzips), Somigliana, Reißner (Erzeugung von Selbstspannungsfeldern aus kontinuierlich verteilten Unstimmigkeiten), A. Föppl (Überlagerbarkeit von kleinen Selbst- und Lastspannungen), Armanni, Almansi (umgestülpte Schale), Voigt (thermo-elastokinetische Gleichungen) und Neményi (Einführung von „Lastsingularitäten“, die in mehrfach zusammenhängenden Körpern auch Vollerrasche Zwängungsspannungen erzeugen können).

K. Hohenemser (Göttingen).

Dupont, Yvonne: Sur la théorie invariante de l'élasticité à déformations finies. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 873—875 (1931).

Le tenseur des déformations e_{ij} peut être développé suivant les puissances des déplacements u^i (supposés finis) et de leurs dérivées (L. Brillouin). En désignant par $e_{ij}^{(p)}$ l'ensemble des termes dont l'ordre ne dépasse pas p , l'auteur énonce le théorème suivant. Les $e_{ij}^{(p)}$ seront deux fois covariants si l'on y remplace les u^i par $u_{(p)}^i$ dont la variance est donnée par

$$u_{(p)}'^i = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n!} \frac{\partial^n x'^i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_n}} u_{(p)}^{j_1} u_{(p)}^{j_2} \dots u_{(p)}^{j_n}.$$

La démonstration de ce théorème qui donne la loi de transformation des $e_{ij}^{(p)}$ pour un changement quelconque de coordonnées $x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3)$ est remise à un travail ultérieur. V. Fock (Leningrad).

Finzi, Bruno: Tensori elastici per deformazioni finite. Boll. Un. mat. ital. **10**, 57—61 (1931).

Es sei $X_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ein kovarianter Tensor von der Ordnung k und Y_{p_1, p_2, \dots, p_h} ein kovarianter Tensor von der Ordnung h in einem Raume von gegebener Metrik. Es seien die Größen Y_{p_1, p_2, \dots, p_h} analytische Funktionen der Größen $X_{i_1 i_2 \dots i_k}$ in der Umgebung von $(0, 0, \dots)$. Die Laurinsche Entwicklung von Y_{p_1, p_2, \dots, p_h} enthält dann Glieder von der Form

$$\gamma_{p_1 \dots p_h i_1' \dots i_k' \dots i_1^{(n)} \dots i_k^{(n)}} X_{i_1' \dots i_k' \dots i_1^{(n)} \dots i_k^{(n)}}.$$

Symbolisch kann man die Reihe in der Form $Y = \sum_{h+nk}^{\infty} \gamma_{nk}^{(n)} \cdot X^n$ schreiben. Die Kom-

ponenten des Krafttensors der Elastizitätstheorie sind Funktionen der Komponenten des Deformationstensors. Entwickelt man im obigen Sinne den Krafttensor Y nach Laurin in eine Reihe nach X , so kann man die Tensoren $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ als 1., 2., ..., n ten elastischen Tensor bezeichnen; bei infinitesimalen Verschiebungen genügt es, die Untersuchungen auf den ersten elastischen Tensor zu beschränken, während bei endlichen Verschiebungen auch die höheren Tensoren herangezogen werden müssen. Bei der Untersuchung endlicher Verschiebungen an isotropen Körpern treten besondere Typen von elastischen Tensoren auf. F. Knoll (Wien).

Schmidt, Harry: Biegung der frei aufliegenden Rechteckplatte mit statischer, rechteckig berandeter Lastverteilung. (Theoret.-Phys. Inst., Univ. Leipzig.) Z. Physik **68**, 423—432 (1931).

Die Durchbiegung $w = w(x, y)$ einer dünnen elastischen Platte genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(xy)}{B}, \quad (1)$$

worin $p(xy)$ die auf die Plattenoberfläche wirkende Pressung bedeutet (B = Plattensteifigkeit). Für die frei gestützte Rechteckplatte ($0 < x < a$; $0 < y < b$), die auf einem rechteckigen Teilbereich ($x_1 < x < x_2$; $y_1 < y < y_2$) eine konstante Belastung p_0 trägt, treten zu (1) folgende Randbedingungen hinzu:

$$w(0, y) = w(a, y) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0, \quad (2a)$$

$$w(x, 0) = w(x, b) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0 \quad (2b)$$

und für $p(xy)$ gilt

$$\left. \begin{array}{l} 1. \ x_1 < x < x_2; \ y_1 < y < y_2: \ p(xy) = p_0, \\ 2. \ \text{an den übrigen Stellen:} \ p(xy) = 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Die Grundlage des Schmidtschen Integrationsverfahrens bildet eine Integraldarstellung dieser diskontinuierlichen Funktion $p(xy)$. Mit Hilfe einer in einer

früheren Arbeit [H. Schmidt, Z. angew. Math. 9, 491 (1929)] angegebenen Beziehung wird gezeigt, daß

$$p(x, y) = -\frac{p_0}{4\pi^2} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} e^{(y\zeta+xz)} \frac{(e^{-y_1\zeta} - e^{-y_2\zeta})}{\zeta} \frac{(e^{-x_1z} - e^{-x_2z})}{z} d\zeta dz \quad (4)$$

die verlangten Eigenschaften (3) besitzt. Für die Durchbiegung $w = w(xy)$ macht der Verf. den Ansatz

$$w(xy) = -\frac{p_0}{4\pi^2 B} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} u(x, y; \zeta, z) \frac{(e^{-y_1\zeta} - e^{-y_2\zeta})}{\zeta} \frac{(e^{-x_1z} - e^{-x_2z})}{z} d\zeta dz, \quad (5)$$

wo $u = u(xyz\zeta)$ eine noch zu bestimmende Funktion ist. Durch Eingehen in Gl. (1) und (2) folgt für u

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = cy\zeta + xz \quad (6)$$

mit den Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) = u(a, y) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0, \\ u(x, 0) = u(x, b) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Lösung dieses Randwertproblems wird explizit hergestellt. Die weiteren Rechnungen befassen sich zunächst mit der Auswertung des Integrals (5) und liefern für $w(xy)$ eine einfach-unendliche Fourierreiheentwicklung. Durch spezielle Wahl der x_1, y_1, x_2, y_2 werden dann — gleichfalls explizit — die Lösungen für folgende Belastungsfälle angegeben: 1. die über die gesamte Oberfläche gleichförmig belastete Platte, 2. die Platte a) mit schneidenförmiger, b) mit punktförmiger Einzellast. E. Weinle (Göttingen).

Sen, Bibhutibhusan: On the bending of thin uniformly-loaded elastic plates bounded by certain quartic curves. J. indian. math. Soc. 19, 12—16 (1931).

Es wird gezeigt, daß sich für gleichmäßig belastete eingespannte Platten, deren Begrenzung gebildet wird durch Kurven, die durch die Transformationen

$$\frac{x + iy}{c} = \frac{1}{\cos(\xi + i\eta)} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{x + iy}{2c}} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\xi + i\eta}{2}\right)}$$

aus den Koordinatenlinien ξ, η entstehen, die Lösung der Plattengleichung $\Delta \Delta w = p/D$ in geschlossener Form angeben läßt. Die zu den beiden Transformationen gehörigen Kurvenscharen sind als Inverse zu Kegelschnitten (Lemniskaten von Booth bzw. Schneckenkurven) bekannt. Wie die Konstanten bestimmt werden, wird im einzelnen nicht gezeigt. Die Ergebnisse lassen sich leicht verifizieren — interessieren aber natürlich mehr vom rein mathematischen, als von einem praktischen Standpunkte aus.

K. Marquerre (Karlsruhe).

Tesar: Représentation, en grandeur et en direction, des efforts intérieurs dans le cas des problèmes d'élasticité plane. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 728—729 (1931).

Jeder ebene Spannungszustand kann in der bekannten Weise durch das orthogonale Netz der Spannungslinien geometrisch veranschaulicht werden. Ausgehend von diesem Liniensystem gelangt der Verf. zu einer anderen geometrischen Darstellung, indem er die längs den aufgeschnittenen Spannungslinien wirkenden Spannungen nach Größe und Richtung summiert; beim Fortschreiten längs einer Spannungslinie beschreibt dieser Vektor einen Kurvenzug. In der neuen Darstellung entspricht also jeder Spannungslinie eine neue Kurve, und dem orthogonalen Netz der Spannungslinien entspricht ein orthogonales Netz dieser neuen Kurven, die Tesar als „courbes dynamiques-isostatiques“ bezeichnet. Die Maschenweite des Netzes gibt unmittelbar ein Maß für die Hauptspannungen. Die Zuordnung kann auch als eine winkeltreue

Abbildung aufgefaßt werden. Zusammenhänge mit der Airyschen Spannungsfunktion werden andeutungsweise berührt, und schließlich weist der Verf. darauf hin, daß die entwickelte Darstellungsform nur bei Abwesenheit von Massenkraften anwendbar ist.

E. Weinell (Göttingen).

Baud, R. V.: On the determination of principal stresses from crossed Nicol observations. J. Franklin Inst. **211**, 457—474 (1931).

Wie bekannt, können auf optischem Wege die Hauptspannungstrajektorien und die Differenz der Hauptspannungen eines ebenen Spannungszustandes bestimmt werden. Diese Größen bestimmen, wie schon Maxwell gezeigt hat, das Spannungsfeld vollständig. Der Verf. gibt eine Übersicht der zur numerischen Auswertung dieses Spannungsfeldes zur Verfügung stehenden graphischen Methoden. Wesentlich Neues, was über die denselben Gegenstand behandelnden Abhandlungen L. Föppl's (vgl. z. B. Untersuchungen ebener Spannungszustände mit Hilfe der Doppelbrechung, Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. **1928**; Mitt. Mech.-techn. Laborat. Techn. Hochsch., München **1930**) hinausginge, bietet diese Mitteilung nicht.

C. B. Biezeno (Delft).

Thom, Alexander, and James Orr: The solution of the torsion problem for circular shafts of varying radius. Proc. roy. Soc. Lond. A **131**, 30—37 (1931).

Die Lösung des Torsionsproblems einer kreisförmigen Welle mit veränderlichem Radius R kann bekanntlich zurückgeführt werden auf die Lösung einer einzigen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Hierin bedeuten r und z die radiale und die axiale Koordinate eines in einem bestimmten Meridianschnitt gelegenen Punktes und ψ eine von diesen Koordinaten abhängige Funktion, welche an der Meridiankurve einen konstanten Wert hat und mit welcher die in dem Punkt (r, z) auftretenden (und in den Meridianschnitt fallenden) Spannungskomponenten $\widehat{\Theta}z$ und $r\widehat{\Theta}$ folgendermaßen zusammenhängen:

$$\widehat{\Theta}z = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad r\widehat{\Theta} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

($\widehat{\Theta}z$ ist die axial gerichtete, $r\widehat{\Theta}$ die radial gerichtete Komponente). Es handelt sich nun um ein Näherungsverfahren zur Lösung dieser Differentialgleichung, wobei zuerst in den Punkten eines Gitters Funktionswerte für ψ (welche in Einklang mit den Randbedingungen stehen) angenommen werden. Sind $A B C D$ die Eckpunkte einer Masche, so wird (auf Grund der Taylor-Entwicklung) für den Funktionswert ψ_M in der Mitte M der Masche gestellt:

$$\psi_M = \frac{1}{4} (\psi_A + \psi_B + \psi_C + \psi_D) - \frac{1}{8} S^2 \cdot \frac{3}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

(S = Maschenweite). Die Punkte M bilden ein neues Gitter, auf welches das Verfahren von neuem angewandt wird. Die Konvergenz des Verfahrens wird gewährleistet.

C. B. Biezeno (Delft).

Timpe, A.: Achsensymmetrische Torsionszustände und ihre Inversion. Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 8—15 (1931).

Es wird eine Ausgestaltung der Theorie der Torsion von Drehkörpern gegeben durch Einführung räumlicher Polarkoordinaten und gezeigt, daß die so erhaltenen Spannungszustände sich auf 2 verschiedene Arten invertieren lassen. Bei dem ersten, dem Spannungstyp, geht ein spannungsfreier Rand wieder in einen solchen über, wobei aber (ähnlich wie bei der Inversion ebener Spannungszustände) den zugeordneten Spannungen noch ein zusätzlicher Teil zu überlagern ist. Der zweite, der Verschiebungstyp, ist dadurch gekennzeichnet, daß sämtliche Verschiebungen den ϱ -fachen Betrag annehmen (ϱ = Abstand vom Inversionszentrum). Durch diese Inversionen können aus den bekannten neue Lösungen erhalten werden. Das Verfahren wird aus-

geführt für den Kegel (und Hohlkegel), der auch auf dem Mantel Spannungen aufzunehmen hat, für die Kugel, auf die an den Polen zwei entgegengesetzt gleiche tordierende Momente einwirken, und für den ebenso beanspruchten Spindelkörper, der durch Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne entsteht. — Hinweis auf die Übertragung der Inversion auf achsensymmetrische Strömungsprobleme.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Böttcher, F.: Durchhang von Leitungsseilen bei beiderseitiger Abspannung durch Isolatorenkette und Belastung durch Einzelgewicht. *Elektrotechn. Z.* 1931 I, 174 bis 177.

Die Kenntnis des Durchhanges unter den im Titel angegebenen Bedingungen wird einmal benötigt beim Entwurf der Aufbaugerüste. Ferner ist der Einfluß der Änderung der Temperatur und der Belastung auf den Durchhang bzw. die Zugspannung von Wichtigkeit. Die Annahmen, die der Rechnungsmethode zugrunde liegen, sind folgende: 1. Die Abspannketten werden als starre Stäbe behandelt. 2. Die Seillinie wird durch die Parabel 2. Grades ersetzt. 3. Die im Spannungsfeld angebrachte Einzellast ist von gleicher Größenordnung wie das Gewicht der Abspannkette. Die Spannweite wird betrachtet als die Summe der konstanten Spannweite bei horizontalliegenden Abspannketten und aus den auf beiden Seiten durch das Schrägliegen der Isolatoren entstehenden Teilstücken. Der Rechnungsgang führt zu übersichtlich gestalteten Endformeln und wird an einem Beispiel erläutert.

M. Bergsträßer (Dresden).

Sezawa, Katsutada: On the buckling under edge thrusts of a rectangular plate clamped at four edges. (*Aeronaut. Research Inst., Imp. Univ., Tokyo.*) *Proc. imp. Acad.* (Tokyo) 7, 48—51 (1931).

Sezawa, Katsutada: On the lateral vibration of a rectangular plate clamped at four edges. (*Aeronaut. Research Inst., Imp. Univ., Tokyo.*) *Proc. imp. Acad.* (Tokyo) 7, 52—53 (1931).

In diesen beiden Abhandlungen werden die Knicklasten bzw. Eigenschwingungszahlen einer rechteckigen eingespannten Platte angenähert berechnet mittels einer modifizierten Ritzschen Methode. Es wird ein Ansatz gemacht von 4 Gliedern mit 4 Koeffizienten, wovon jedes Glied eine exakte Lösung der Differentialgleichung darstellt, aber nicht den Randbedingungen genügt. Die 4 Koeffizienten werden dann so bestimmt, daß am Rande zwar überall die Durchbiegung verschwindet, daß aber der Neigungswinkel nur Null wird in der Mitte jeder Seite und an den Ecken. Eine Aussage über die Genauigkeit des Verfahrens wird nicht gemacht.

Den Hartog (Göttingen).

Lokehine, A.: Sur les vibrations tournantes d'un corps limité par une surface de révolution. *C. r. Acad. Sci. Paris* 192, 542—543 (1931).

Bei den achsensymmetrischen Torsionsschwingungen eines Rotationskörpers gilt für die Amplitude F der Verdrehung p des Kreises vom Radius r , wenn x die Entfernung des Querschnitts vom Koordinatenursprung bedeutet, und ξ und η mit x und r durch die passend zu wählende Abbildungsfunktion $x + ir = f(\xi + i\eta)$ verknüpft sind, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(r^3 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r^3 \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{m^2}{h^2} r^3 F = 0,$$

wobei $m^2 = \gamma k^2 / gG$, k = Kreisfrequenz, $h^2 = (\partial x / \partial \xi)^2 + (\partial x / \partial \eta)^2$. Um den Randbedingungen $\partial p / \partial n = 0$ für die freie, $p = 0$ für die festgehaltene Oberfläche zu genügen, richtet sich die Wahl der Abbildungsfunktion nach der Meridiankurve. Besteht diese aus Geraden und Kreisbögen, so liefert $x + ir = ce^{\xi + i\eta}$, wenn F nur von ξ abhängt, also $\partial F / \partial \eta = 0$ erfüllt ist, die Beziehung

$$F = \frac{1}{\varrho^2} \left[A \left(\frac{\sin m \varrho}{m \varrho} - \cos m \varrho \right) + B \left(\sin m \varrho + \frac{\cos m \varrho}{m \varrho} \right) \right] \quad (\varrho = ce^{\xi}).$$

Hat der Körper ein spitzes Ende, so ist noch $B = 0$; ist das andere Ende bei $\varrho = R$ festgehalten, so berechnet sich k aus $\operatorname{tg} m R = m R$. Bei parabelförmiger Begrenzung setzt man $x + ir = (\xi + i\eta)^2$. Mit dem Ansatz $F(\xi, \eta) = u(\xi) \cdot v(\eta)$ ergibt sich für

den spitzen Körper, der in $\xi = \alpha$ festgehalten ist, bei $\eta = \beta$ an der freien Oberfläche und endlichen $u(0)$ und $v(0)$:

$$u = A \int_0^1 \cos \left[2m\xi^2 \left(z - \frac{1}{2} \right) + \frac{\lambda}{2m} \log \frac{z}{1-z} \right] dz,$$

$$v = B \int_0^1 \cos \left[2m\eta^2 \left(z - \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda}{2m} \log \frac{z}{1-z} \right] dz.$$

λ und m bestimmen sich aus $u(\alpha) = 0$, $(\partial v / \partial \eta)_{\eta=\beta} = 0$. *S. Gradstein* (Darmstadt).

Ryan, James Jay: An investigation of the fundamental critical speeds of multiple shafts. *J. Franklin Inst.* **211**, 151—195 (1931).

Bekannte Methoden zur Berechnung der kritischen Drehzahlen mehrfach gelagerter Wellen, die mit Einzelmassen behaftet sind und deren Eigenmasse vernachlässigt wird, sind ausführlich dargestellt und an Beispielen erläutert. Die statischen Einflußzahlen der Welle werden, entsprechend den üblichen Berechnungsweisen der Baustatik, ermittelt, wobei entweder von den Dreimomentengleichungen (Clapeyron) oder von den aus dem Castiglianoschen Prinzip folgenden elastischen Grundgleichungen Gebrauch gemacht wird. Nachdem die Einflußzahlen bekannt sind, läßt sich die Frequenzgleichung aufstellen, deren Wurzeln die Quadrate der Eigenfrequenzen sind.

K. Hohenemser (Göttingen).

Capetti, Antonio: Sul calcolo dei periodi di oscillazione torsionale libera degli alberi. *Aerotecnica* **11**, 157—166 (1931).

Es wird ein graphisches Verfahren entwickelt zur Bestimmung der $n - 1$ Frequenzen der freien Drehschwingungen eines Systems von n Scheiben, die auf einem elastischen masselosen Stab konstanter Verdrehungssteifigkeit befestigt sind. Zu parallelen Kräften, die den Trägheitsmomenten der Scheiben proportional sind und voneinander die Abstände der einzelnen Scheiben haben, wird ein Seilpolygon gezeichnet, durch dessen Eckpunkte ein zweites Polygon so zu legen ist, daß die $n - 1$ Momentenabschnitte zwischen den Eckpunkten des zweiten und den entsprechenden Seiten des ersten Polygons gleich groß ausfallen. Diese Aufgabe läßt $n - 1$ Lösungen zu, die Quadrate der gesuchten Eigenfrequenzen sind den Momentenabschnitten dieser verschiedenen Lösungen umgekehrt proportional. Das Verfahren deckt sich weitgehend mit dem von E. Rausch [*Ingenieurarchiv* **1**, 203 (1930)] angegebenen.

Prager (Göttingen).

Duffing, G.: Elastizität und Reibung beim Riemetrieb. *Forschg. Ing.Wes.* **B 2**, 99—104 (1931).

Eine Lösung des Problems des Riemetriebes ist bisher nur bekannt gewesen unter der Annahme einer unendlichen longitudinalen Starrheit des Riemens. Verf. behandelt 2 Hauptprobleme: 1. Das Nachlassen mit der Zeit der Spannung eines vorgespannten Riemens. Die Volterrasche Vererbungstheorie zerteilt die Dehnung $\varepsilon(t)$ in ein Teil nur abhängig von der jeweiligen Spannung $k(t)$ und ein Teil abhängig von der ganzen Vorgeschichte. Für eine Spannung $= 0$ für $t < 0$ und $= k$ für $t > 0$ wird die Dehnung:

$$\varepsilon(t) = \beta k \left[1 + \int_0^t \varphi(t - \tau) d\tau \right], \quad (1)$$

wo k die Elastizitätskonstante und φ die „Vererbungsfunktion“ bedeuten. Aus Versuchen bestimmt Verf. die φ für Lederriemen in der Form: $\varphi(t - \tau) = \lambda(t - \tau)^{-\alpha}$; das ganze Verhalten des Riemens ist bestimmt durch die drei Konstanten β , λ und α . Mittels der entsprechend verallgemeinerten Integralgleichung (1) werden dann folgende Fragen gelöst: a) die Spannungsabnahme in einem Riemen von konstanter Länge; b) die Längenzunahme eines Riemens mit konstanter Spannung; c) der Einfluß der Riemenbiegung um die Rolle. — 2. Das Reibungsgesetz unter den Einfluß

der Riemenelastizität. Für dieses Problem kann die elastische Nachwirkung (Vererbungsfunktion) vernachlässigt werden. Aus Versuchen über die Spannungen im auflaufenden und ablaufenden Teil eines Riemens über eine Bremsscheibe bei verschiedenen Geschwindigkeiten wird eine ziemlich komplizierte Formel abgeleitet, welche an Stelle der bekannten Grashoffschen Formel $\mu\varphi = \ln(S_1 - S_2)$ tritt und welche die Riemenelastizität und Geschwindigkeit mit enthält. In dieser Formel treten noch drei willkürliche Konstanten auf, die aus weiteren Versuchen bestimmt werden müssen.

Den Hartog (Göttingen).

Jaerisch, P.: Zur Theorie der elastischen Schwingungen eines endlichen, isotropen und festen Kreiszylinders. Mitt. math. Ges., Hambg. 7, 12—20 (1931).

Der Verf. behandelt einen gewissen Typus von freien Schwingungen eines hohlen Kreiszylinders von endlichen Abmessungen unter strenger Einhaltung der Bedingung, daß die gesamte Zylinderoberfläche spannungsfrei ist. Zunächst werden die Elastizitätsgleichungen und die zugehörigen Randbedingungen in Zylinderkoordinaten angeschrieben. Mit Berücksichtigung der Achsensymmetrie und unter der weiteren Annahme, daß die Schubspannungskomponente τ_{rz} nicht nur auf der Oberfläche sondern auch in allen inneren Punkten des Zylinders verschwindet, können, wie der Verf. zeigt, die Elastizitätsgleichungen in einfacher Weise integriert werden. Das Ergebnis sind Schwingungen, die ohne Volumdehnung vor sich gehen. E. Weinel (Göttingen).

Hohenemser, K.: Fließversuche an Rohren aus Stahl bei kombinierter Zug- und Torsionsbeanspruchung. (Inst. f. Angew. Math., Univ. Göttingen.) Z. angew. Math. u. Mech. 11, 15—19 (1931).

Die vom Verf. angestellten Versuche verfolgen den Zweck, eine Entscheidung darüber zu treffen, welcher von den beiden von Hencky und Reuß verwandten Ansätzen [vgl. H. Hencky, Z. f. angew. Math. u. Mech. 4, 323 (1924) — A. Reuß, Z. f. angew. Math. u. Mech. 10, 266 (1930)] der bessere ist. Der Unterschied zwischen beiden Ansätzen liegt darin, daß Hencky unter Benutzung der Misesschen Fließbedingung den Haar-Kármánschen Ansatz gebraucht, nach welchem das Castiglianosche Spannungs-Variationsprinzip derart modifiziert wird, daß durch Ungleichheits-Nebenbedingungen den Grenzflächen zwischen elastischem und plastischem Gebiet Rechnung getragen wird, während Reuß die Grundgleichungen der Misesschen Plastizitätstheorie zu den nach der Zeit differenzierten elastischen Grundgleichungen addiert. Beide Ansätze führen für ein Rohr, das so lange verdreht wird, bis die Fließgrenze über den ganzen Querschnitt erreicht ist, und dann unter konstant bleibendem Verdrehungswinkel gezogen wird, zu verschiedenen Ergebnissen. Es sei K die Fließgrenze bei einachsigem Zug oder Druck: $\sigma_f = K/E$; ε die spezifische Dehnung in der Achsenrichtung des Rohres: $e = \varepsilon/\varepsilon_f$; σ die Zugspannung; $\sigma/K = p$; so gilt nach Hencky:

$$e = \frac{2(m+1)}{3m} \left[\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} + p \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2(m+1)} \right) \right]$$

und nach Reuß:

$$e = \frac{2(m+1)}{3m} \left[A r T g p + p \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2(m+1)} \right) \right].$$

Die Versuche fallen zugunsten der Henckyschen Gleichungen aus. Biezeno.

Cook, Gilbert: The yield point and initial stages of plastic strain in mild steel subjected to uniform and non-uniform stress distributions. Philos. Trans. roy. Soc. Lond. A 230, 103—147 (1931).

Bericht über vergleichende Versuche über den Eintritt des Fließens an Vollstäben aus weichem Stahl unter Zug-, Verdrehungs- und Biegebungsbeanspruchung und an Rohren unter Innendruck. Der Einfluß der Entfestigung auf die Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen wird berücksichtigt. Zur Erklärung der höheren Fließspannung bei den Versuchen mit ungleichförmiger Spannungsverteilung wird eine Oberflächenschicht angenommen, die zwar die gleichen elastischen Eigenschaften

wie das übrige Material besitzt, aber eine höhere Fließgrenze hat. Die Versuchsergebnisse stimmen besser mit der Schubspannungshypothese als mit der Hypothese der begrenzten Formänderungsenergie überein. *Prager* (Göttingen).

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

Kirchhoff, Wilhelm: Reduktion simultaner partieller Differentialgleichungen bei hydrodynamischen Problemen. *J. f. Math.* **164**, 183—195 (1931).

Der Verf. behandelt zunächst die Integration der hydrodynamischen Grundgleichungen einer eindimensionalen Flüssigkeit (keine äußeren Kräfte, Dichte nur vom Druck abhängig); in gewissen Spezialfällen führt er das Problem auf die Auflösung einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück. Dem Verf. ist offenbar die fundamentale Riemannsche Arbeit „Über die Ausbreitung ebener Luftschwingungen von endlicher Schwingungsweite“ entgangen, die ebenfalls das genannte Problem auf die Integration einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung zurückführt, deren Auflösung die Grundlage und der Anstoß zur Entwicklung der allgemeinen Theorie der linearen hyperbolischen Differentialgleichungen wurde. In der W. Kirchhoffschen Arbeit wird schließlich die Bewegung mit innerer Reibung (bzw. auch Wärmeleitung) auf eine nichtlineare Differentialgleichung 3. (bzw. 5.) Ordnung in einer gesuchten Funktion transformiert. *H. Lewy* (Göttingen).

Alayrac: Sur certains mouvements à trois dimensions. *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 213 bis 215 (1931).

Die Arbeit ist Fortsetzung einer früheren [C. r. Acad. Sci. Paris **191**, 290 (1930)]. Seien A, B, C, D 4 analytische Funktionen einer komplexen Variablen $\alpha = V + V_i(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$. Jeder Punkt der α -Ebene wird in die reelle Gerade der komplexen Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ abgebildet; das Gesamtbild der α -Ebene ist demnach eine Linienkongruenz Φ_α im dreidimensionalen Raume. Einer ebenen Strömung $\beta = f(\alpha)$ entspricht eine Strömung im Raume, deren Geschwindigkeiten bestimmt werden. Es wird ein einfaches, physikalisch mögliches Beispiel einer Bewegung ohne Singularitäten angegeben; die Geschwindigkeit im Unendlichen ist konstant und parallel zu Ox . *E. Čech* (Brünn).

Ten Brink, J. D. A. M.: Das Gefälle gleichmäßiger stationärer Strömungen. *Ingenieur* **1931 I**, B. 93—B. 95 [Holländisch].

In der Arbeit sucht der Verf. die Beziehung zwischen dem Gefälle (= Höhenunterschied des Flüssigkeitsspiegels pro Längeneinheit des durchflossenen Weges = $\sin i$) und dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit durch Wirbelung zu erklären. Der Verf. behandelt das Problem für den Fall einer ebenen, reibungslosen und stationären Strömung, die periodisch gleichmäßig ist. Aus den Eulerschen Gleichungen leitet er für das „mittlere Gefälle“ den Ausdruck ab:

$$\overline{g \sin i} = \frac{1}{\text{Periode}} \int_{\text{Periode}} v w dx,$$

worin v die Geschwindigkeit in der y Richtung und w die Wirbelstärke = $\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ bedeuten. (Das Achsenkreuz ist so gelegt, daß die x -Achse in der mittleren Richtung der Strömung liegt und die y -Achse senkrecht dazu steht. Bei vollkommen gleichmäßiger Strömung würde also die Quergeschwindigkeit v dauernd verschwinden.) Es werden nun für die Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y)$; $v(x, y)$ Funktionen gesucht, die so beschaffen sind, daß das gemittelte Produkt $vw \neq 0$ ist und die ferner noch folgende Bedingungen erfüllen: 1. Kontinuitätsbedingung; 2. die Geschwindigkeitskomponente u muß periodisch gleichmäßig sein; 3. die gemittelte Stromlinie von einem Flüssigkeitsteilchen muß parallel zur x -Achse laufen; 4. damit das gemittelte Produkt vw von Null verschieden wird, ist notwendig, daß (vw) eine Funktion von $(\sin x)^2$ enthält, die nicht zurückgeführt werden kann auf eine rationale Funktion von einem

Vielfachen des Winkels; 5. da das mittlere Gefälle für alle Stromlinien dasselbe ist, muß der in der x -Richtung gemittelte Ausdruck w unabhängig von y sein. Zur Lösung des Problems führt der Verf. eine Stromlinienfunktion Ψ ein, die mit u und v durch:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{Vorzeichenfehler!})$$

verbunden ist und die er mit Hilfe der obigen Bedingungen zu:

$$\psi = \frac{\sqrt{2ab}}{c\pi} \sqrt{g \sin i} \left[1 + c \sin \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \pi \right] \sqrt{k - y}$$

bestimmt, wobei a, b, c, k konstant sind. [Ansatz: $\psi = f(y) \left\{ 1 + c \sin \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \pi \right\}$].

Zum Schluß werden die Betrachtungen auch für zähe Flüssigkeiten durchgeführt.

J. J. Sommer (München).

Lotz, Irmgard: Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. (*Kaiser Wilhelm-Inst. f. Strömungsforsch., Göttingen.*) Z. Flugtechn. **22**, 189—195 (1931).

Die Aufgabe, die Verteilung der Zirkulation $\Gamma(x)$ längs der Spannweite b eines Tragflügels von gegebener Gestalt — Flügeltiefe $t(x)$ und Anstellwinkel $\alpha(x)$ — zu berechnen, führt auf folgende Integralgleichung:

$$\frac{1}{4\pi V} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \frac{d\xi}{\xi - x} + \frac{\Gamma(x)}{c_1 \cdot t(x) \cdot V} = \alpha(x),$$

wobei V die Fluggeschwindigkeit und c_1 die konstante Ableitung der Zahl Γ/Vt nach dem wirksamen Anstellwinkel α_e bedeutet. Man gelangt zu einer Lösung, die allen Anforderungen der Praxis an die Rechenmethode hinsichtlich Konvergenz und Arbeitsökonomie entspricht, wenn man $x = -\frac{b}{2} \cos \delta$ einführt und folgenden Ansatz macht:

$\Gamma = V \cdot t_{x=0} \cdot c_1 \sum \alpha_{en} \sin n\delta$. Weiter wird vorausgesetzt — was beim technischen Problem immer erfüllt ist —, daß sich die Reihenentwicklungen

$$\alpha(x) \cdot \sin \delta = \sum \alpha_{gn} \sin n\delta \quad \text{und} \quad \frac{t_{x=0}}{t(x)} \sin \delta = \sum \gamma_{2\nu} \cos 2\nu\delta$$

ausführen lassen. Es ergibt sich dann ein Gleichungssystem, das sich in 2 Systeme aufspalten läßt, von denen eines nur die geraden, das andere nur die ungeraden Koeffizienten α_{en} enthält. Die Gleichungen sind bequem und rasch zu lösen, nachdem die Analyse der Flügelgestalt geleistet ist. Die gefundene Lösung erlaubt die Berechnung des Auftriebs und des induzierten Widerstands sowie der bei ausgeschlagenen Querrädern auftretenden Momente um die Längsachse (Rollmoment) und um die Hochachse (induziertes Kursmoment). Der Vergleich berechneter Rollmomente mit Göttinger Messungen Petersohns zeigt im Bereich guter Ruderwirkung recht befriedigende Übereinstimmung. — Die Arbeit enthält eingangs eine Übersicht über die älteren Lösungsversuche.

H. B. Helmbold (Göttingen).

Koning, C.: Der Einfluß des Rippenverbandes auf die Stärke von Flugzeugflügeln. IV. Ingenieur **1931 I**, W 1—W 8 [Holländisch].

Ringleb, Friedrich: Über ebene Potentialströmungen durch Gitter. Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 40—45 (1931).

Die Arbeit gibt auf funktionentheoretischer Grundlage einen Überblick über die Hydrodynamik der zweidimensionalen Gitterströmung. Zunächst werden die charakteristischen Eigenschaften der komplexen Strömungsfunktion zusammengestellt und daraus auf formalem Wege ein analytischer Ausdruck dieser Funktion in Gestalt eines bestimmten Integrals hergeleitet. Dabei wird von einem konformen Abbildungsprozeß Gebrauch gemacht, der in spezieller Form bereits von E. König [Potentialströmung durch Gitter; Z. f. angew. Math. u. Mech. **2** (1922)] angewendet worden ist. Sodann wird das Verhalten der Strömung an den Schaufelkanten analysiert, und der Begriff

des „glatten“ An- und Abströmens durch Einführung der „Strömungswinkel“ festgelegt. Für diese Strömungswinkel ergibt sich eine einfache geometrische Deutung, die bei gegebener Abbildung eine zeichnerische Konstruktion ermöglicht. Schließlich werden die Ergebnisse von E. König, l. c., als Sonderfall in die vorliegende Untersuchung eingeordnet.

E. Weinel (Göttingen).

Cisotti, U.: *Correnti circolatorie locali intorno a regioni di acqua morta*. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 85–92 (1931).

Der Verf. untersucht die örtliche Strömung, die um einen Bereich von Totwasser zirkuliert, unter Benutzung der von T. Levi-Civita und vom Verf. entwickelten Methoden. Er benutzt dabei die Funktion

$$Z_1 = i \frac{\zeta^2 - 2i\zeta + 1}{\zeta^2 + 2i\zeta + 1},$$

die einen Halbkreis $(-1; i; +1)$ der ζ -Ebene konform abbildet in das Äußere des Kreises $Z_1 \geq 1$ der Z_1 -Ebene. Stellt $f = \frac{C}{2\pi i} \log Z_1$ das kinetische Potential einer Strömung dar um den Wirbelpunkt $Z_1 = 0$ (Wirbel), so ist $f = \frac{C}{2\pi i} \log \left\{ i + \frac{4\zeta}{\zeta^2 + 2i\zeta + 1} \right\}$ das kinetische Potential der entsprechenden Strömung in der ζ -Ebene (innerhalb des Halbkreises) um den Wirbelpunkt $\zeta = i(\sqrt{2}-1)$. Die Geschwindigkeit wird bestimmt durch $df/d\zeta$. Die Strömung um einen Bereich von Totwasser wird in 2 Fällen behandelt: 1. Der Totwasserbereich wird durch eine freie Oberfläche begrenzt. Es wird gezeigt, daß das Totwassergebiet nicht anders als kreisförmig sein kann. Für das Potential $f(Z)$ ergibt sich: $kf = \frac{\pi}{2} - i \log k - i \log (Z - Z_0)$, wobei k und Z_0 konstant sind. 2. Der Totwasserbereich wird zum Teil durch eine feste Wand w und zum Teil durch eine freie Oberfläche λ begrenzt. λ und ω können nicht a priori vorgegeben werden, aber es ist im allgemeinen möglich, bei vorgegebenem ω , λ zu bestimmen. Ist insbesondere ω ein Teil eines Kreisbogens, so ist λ der übrige Kreisbogen und δ und ω bilden zusammen einen vollständigen Kreisumfang. Man bestimmt $f(Z)$, indem man durch eine konforme Abbildung auf den Halbkreis der ζ -Ebene übergeht.

$$Z - Z_0 = \frac{2C}{\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\Omega} \frac{(\zeta^2 - 1) d\zeta}{\{\zeta^2 + (\sqrt{2} + 1)^2\} \{\zeta - i(\sqrt{2} - 1)\}^2}$$

liefert die gewünschte Beziehung zwischen Z - und ζ -Ebene, durch die der Bereich des bewegten Wassers (das Äußere des durch λ und ω gebildeten Kreises) konform auf das Innere des Halbkreises abgebildet wird, wobei ω in den Umfang des Halbkreises $(1; i; -1)$ übergeht und λ in den Durchmesser $(-1; +1)$. Ω ist dabei eine im Gebiet des Halbkreises reguläre Funktion, die durch die Vorgabe von ω bestimmt wird. λ ergibt sich dann zwangsläufig. Zum Schluß werden noch die hier aufgestellten Potentialfunktionen als elektrostatische Potentiale interpretiert. Es zeigt sich, daß die Funktion f das elektrostatische Potential liefert in bezug auf den Schnitt eines zylindrischen Leiters, der senkrecht auf der Ebene steht. Die Schnittumrisse des Leiters bilden ω und λ . Über λ ergibt sich eine gleichmäßige Verteilungsdichte $\mu = q = \text{const.}$, während man über ω für μ :

$$\mu = q \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \sigma}}{(\sqrt{2} + \sin \sigma)} \cdot |e^{-i\Omega}|$$

erhält, wobei $\zeta = e^{i\sigma}$.

J. J. Sommer (München).

Sbrana, Francesco: *Sulla validità del teorema di Bernoulli per un fluido reale*. Boll. Un. mat. ital. 10, 77–78 (1931).

In questa nota vengono precisate le condizioni necessarie e sufficienti per la validità della formula di Bernoulli, relativa ad un fluido, con densità funzione della pressione, soggetto a forze di massa conservative e animato di moto permanente.

Autoreferat.

Arakawa, Hidetosi: On the force between two cylindrical vortices in an incompressible fluid. (*Phys. Inst., Imp. Univ., Tokyo.*) Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 13, 61 bis 64 (1931).

Verf. untersucht die zweidimensionale zyklische Potentialbewegung zwischen 2 zylindrischen Wirbeln von entgegengesetzt gleicher Stärke. Für das komplexe Geschwindigkeitspotential $\chi = \varphi + i\psi$ wird der Ausdruck

$$\chi = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{z - \delta}{z + \delta}; \quad (z = x + iy)$$

gefunden. Die am Wirbel angreifende Kraft berechnet sich nach der Blasius'schen Formel zu $P = \rho \Gamma^2 / 4\pi\delta$, während das Moment der Kräfte verschwindet.

V. Fock (Leningrad).

Paris, E. T.: The determination of the acoustical characteristics of singly-resonant hot-wire microphones. Proc. phys. Soc. Lond. 43, 72—86 (1931).

Mittels eines Hitzdrahtmikrophons werden Dämpfung und äquivalente Masse einer Resonatoröffnung bei einer Reihe von Resonatoren gemessen. Ein Vergleich mit Rechnungsergebnissen zeigt gute Übereinstimmung bei der Masse, sobald die Viskosität der Luft in Betracht gezogen wird. Hingegen ist die gemessene Dämpfung im Mittel 23% größer als die berechnete, wofür eine befriedigende Erklärung fehlt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Relativitätstheorie.

Matukuma, Takehiko: Sur l'effet relativistique dans le problème de la variation des latitudes. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 13, 55—60 (1931).

Es wird untersucht, wie die relativistische Ablenkung von Lichtstrahlen im Schwerfeld der Sonne die Bestimmung der Polhöhe eines irdischen Beobachters beeinflusst. Der Effekt überschreitet 0'',0025 nicht, ist also der augenblicklichen Beobachtungsgenauigkeit nicht erreichbar.

O. Heckmann (Göttingen).

Plans, José M.: Über die einheitliche Feldtheorie von Einstein. Rev. mat. hispano-amer. 6, 1—14 (1931) [Spanisch].

Eine klare und einfache Darstellung der Grundgedanken der neuen einheitlichen Feldtheorie von Einstein, soweit sie die rein geometrische Seite der Geometrie betreffen. Über die Verknüpfung der Feldgrößen mit den Richtungsparametern λ_i^j in der neuen Theorie soll in einer weiteren Note berichtet werden.

K. Bechert (München).

Thomas, Tracy Yerkas: On the unified field theory. III. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 48—58 (1931).

In den vorangegangenen Arbeiten [ebenda 16, 761—776 und 830—835 (1930)] hat Verf. die allgemeinen Grundlagen der neuen Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus auseinandergesetzt. In der vorliegenden Note beschäftigt er sich mit den Kompatibilitätseigenschaften der Feldgleichungen, die aufgestellt werden können. Insbesondere werden die Feldgleichungen

$$\Delta_k h_{j,k}^i = 0 \quad (3.1)$$

näher untersucht und das Existenztheorem für dieselben abgeleitet.

Lanczos.

Thomas, Tracy Yerkas: On the unified field theory. IV. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 111—119 (1931).

Auch in der neuen Feldtheorie werden die charakteristischen Flächen durch die Gleichung

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta} = 0. \quad (1.2)$$

charakterisiert, und die Hadamardschen Bicharakteristiken sind geodätische Linien von der Länge Null. Die durch einen Punkt hindurchgehenden Nulllinien erzeugen in ihrer Gesamtheit eine charakteristische Fläche: den Nullkegel der sich kontrahierenden bzw. expandierenden Lichtwelle. Der mathematische Formalismus dieser Beziehungen wird entwickelt.

Lanczos (Frankfurt a. M.).

Haag, J.: Le problème de Schwarzschild. *Mémorial Sci. math.* H. 46, 1—53 (1931).

Die Abhandlung gibt eine allgemeine kompilatorische Übersicht über die kugelsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen. Das 1. Kapitel beschäftigt sich mit der Lösung des Problems im materiefreien Raum. Die Schwarzschildsche Lösung wird durch direkte Herleitung aus den Feldgleichungen und aus dem Hamiltonschen Prinzip gewonnen. Außer den von Schwarzschild verwendeten Koordinaten werden auch „isotrope“ und quasicartesische Koordinaten zur Darstellung des Linienelements verwendet. Im 2. Kapitel folgt die vom Verf. gegebene Lösung im Inneren einer kugelsymmetrischen Massenordnung. Durch Spezialisierung ergibt sich das Feld im Inneren einer inkompressiblen Flüssigkeitskugel und das Feld einer Hohlkugel. Die metrischen Eigenschaften der so erhaltenen Kontinua werden anschließend diskutiert und die geometrischen Verhältnisse sowie das Verhalten von Uhren im Gravitationsfeld untersucht. Dann wird die Bahngleichung eines Massenpunktes im zentralsymmetrischen Gravitationsfeld behandelt und die Periheldrehung der Bahnellipse der sonnennächsten Planeten berechnet. Einige nichtrelativistische Ansätze zur Deutung der Periheldrehung des Merkur werden kritisch untersucht. Lichtstrahlkrümmung und Rotverschiebung von Spektrallinien im Gravitationsfeld werden kurz erwähnt. Weiter wird untersucht, wie die zentralsymmetrischen Lösungen durch den kosmologischen Zusatzterm zu den Feldgleichungen modifiziert werden. Schließlich folgt die Behandlung des Feldes einer geladenen Kugel. Es wird das elektrische Feld und das Gravitationsfeld im Inneren einer Raumladung und im ladungsfreien Außenraum angegeben, und es werden die Bewegungsgleichungen einer Punktladung in diesem Felde integriert.

G. Beck (Leipzig).

McVittie, G. C.: Solution with axial symmetry of Einstein's equations of teleparallelism. *Proc. Edinb. math. Soc.*, II. s. 2, 140—150 (1931).

Axialsymmetrisch heiße eine Weltgeometrie, wenn deren Feldgrößen bei passender Koordinatenwahl nur von einer einzigen der 4 Koordinaten abhängen, und zwar von einer raumartigen. Verf. zeigt, daß die axialsymmetrischen Lösungen der neuesten Einsteinschen Theorie insgesamt nur noch von einem einzigen Parameter abhängen. Ferner verschwindet der elektromagnetische Tensor. Die Dichte der Materie verschwindet im Unendlichen und wird in einer Orthogonalebene der Achse überall unendlich; der Ort dieser Ebene wird vom Parameter der Lösung bestimmt. Der hydrostatische Druck ist in der Richtung der Achse überall halb so groß wie senkrecht zur Achse. Demgegenüber gibt es in der allgemeinen Relativitätstheorie verschiedene axialsymmetrische Lösungen, z. B. das Gravitationsfeld einer gleichförmigen elektrischen Kraft. Diese Lösung ist nun von den hier aufgestellten hinsichtlich ihrer Metrik stets verschieden. Verf. lehnt die neue Feldtheorie auf Grund dieser Ergebnisse als physikalisch unwahrscheinlich ab, zugunsten der allgemeinen Relativitätstheorie.

Stefan Cohn-Vossen (Köln).

Akeley, Edward S.: The axially symmetric stationary gravitational field. *Philosophic. Mag.*, VII. s. 11, 322—330 (1931).

Es werden die Eigenschaften der Einsteinschen kosmologischen Feldgleichungen für den Fall axialsymmetrischer, zeitlich stationärer Massenordnungen untersucht. Es wird gezeigt, daß zwei der Feldgleichungen durch die identisch aus ihnen folgenden Divergenzrelationen ersetzt werden können. Die Gleichungen werden für den Grenzfall, in dem die Spannungen im Inneren der Materie vernachlässigt werden können, approximativ durch Potenzreihenansatz gelöst.

G. Beck (Leipzig).

Akeley, Edward S.: The rotating fluid in the relativity theory. *Philosophic. Mag.*, VII. s. 11, 330—344 (1931).

Die in der vorhergehenden Arbeit gegebenen Ansätze werden dazu verwendet, das Gravitationsfeld einer rotierenden, inkompressiblen Flüssigkeit näherungsweise für kleine Flüssigkeitsdichten durch Potenzreihenansatz zu gewinnen. Es wird gezeigt, daß die Lösung erster Näherung bei geeigneter Koordinatenwahl mit der klassischen

Theorie übereinstimmt, dann wird die zweite Näherung in diesem Koordinatensystem diskutiert. Schließlich wird die zweite Näherung derjenigen Lösung behandelt, welche im klassischen Fall als Gleichgewichtsfigur das Maclaurinsche Ellipsoid liefert.

G. Beck (Leipzig).

Laue, M. von: Die Lichtfortpflanzung in Räumen mit zeitlich veränderlicher Krümmung nach der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 6/7, 123—131 (1931).

Zwischen den beobachteten Linienverschiebungen in den Spektren der Spiralnebel und den beobachteten Totalhelligkeiten dieser Objekte besteht bekanntlich eine Korrelation: Im Mittel ist die „Geschwindigkeit“ eines Objekts umgekehrt proportional der Wurzel aus seiner scheinbaren Totalhelligkeit. Will man diesen Befund deuten im Sinne jener Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation, bei der der räumliche Teil der Welt als ein sich stetig vergrößernder Kugelraum („Oberfläche“ einer vierdimensionalen Kugel) angesehen wird, so muß man sich fragen, ob die beiden hierbei eingehenden Voraussetzungen über die Ausbreitung von Lichtwellen erfüllt sind in Räumen dieser Art, ob nämlich gilt: 1. Das Dopplersche Prinzip. 2. Die quadratische Abnahme der Lichtintensität mit der Entfernung. Diesen beiden Fragen ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Zunächst befreit sich der Verf. von der zweifellos allzu speziellen Voraussetzung, daß der Raum genau sphärisch sei. Er nimmt vielmehr nur an, daß er geschlossen sei und daß das Linienelement die Form habe

$$ds^2 = R^2 \sum \gamma_{ik} dx^i dx^k - dx^4{}^2, \quad x^4 = ct \quad (1)$$

Er nennt alle Räume, die die gleichen γ_{ik} haben, aber verschiedene R , einander „ähnlich“. c ist die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume (konstant); die γ_{ik} sollen nur von x^1, x^2, x^3 und R nur von x^4 abhängen. Offenbar bleibt also ein Raum mit dem Linienelement (1) sich selbst ähnlich im Laufe der Zeit. Neben (1) wird als zweckmäßig befunden das Linienelement

$$ds^2 = R^2 \left(\sum \gamma_{ik} dx^i dx^k - dx'^4{}^2 \right), \quad R = R(x'^4) \quad (2)$$

das man aus (1) erhält durch die Transformation

$$x'^4 = \int_0^{x^4} \frac{dx^4}{R(x^4)}. \quad (2')$$

Dadurch wird erreicht, daß die Maxwell'schen Gleichungen im gestrichenen System gelöst werden durch den Ansatz

$$F'_{ik} = A_{ik}(x^1, x^2, x^3) e^{i\mu x'^4} \quad (3)$$

für die Komponenten des Feldtensors, was einige Vereinfachungen der Rechnungen mit sich bringt. Im ungestrichenen System werden die F_{ik} , sofern einer der Indices 4 ist, noch den Faktor R enthalten. Es ist wesentlich, daß R während der Emission sowohl wie während der Beobachtung sich nur so wenig ändert, daß es als konstant angesehen werden kann. Diese Bedingung ist in der Tat erfüllt, wie die Beobachtungen zeigen. Es folgt nun leicht, daß — wenn ν_0 die Frequenz des Lichtes während der Emission ist, ν_1 die während der Beobachtung — gilt

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = 1 + \frac{V}{c}, \quad (4)$$

also das Dopplersche Prinzip. Dabei hat man sich zu denken, daß der Beobachter (etwa) im Ursprung $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, die Lichtquelle aber bei $x^1 = x_0^1, x^2 = x^3 = 0$ ruhe, so daß die Relativgeschwindigkeit V beider nur auf Kosten der Änderung von R zu setzen ist. Damit ist die erste Frage erledigt. Zur Beantwortung der zweiten geht Laue zurück auf den Erhaltungssatz für den elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensor. Er beweist zunächst den Satz, daß die Gesamtenergie einer Lichtwelle umgekehrt proportional zu R , also nicht konstant ist. Nun enthalten im gestrichenen System die Produkte $g'^{ii} g'^{km}$ den Faktor R^{-4} . Deshalb sind die gemischten Komponenten des Energie-Impuls-Tensors in diesem System von der Form

$$T'^i_k = R^{-4} F'^i_k(x^1, x^2, x^3, x'^4). \quad (5)$$

Das gilt also auch für die Energiedichte. Nennt man in ähnlichen Räumen Punkte mit gleichen x^1, x^2, x^3 „entsprechende Punkte“ und versteht man unter „entsprechenden Zeiten“ solche, für die x'^4 gleich ist, so folgt der Satz: „Vergleichen wir in ähnlichen Räumen, von denen der eine den Anfangswert R_0 von R dauernd beibehält, während im anderen R zeitlich veränderlich ist, Lichtwellen, die vom gleichen Anfangszustande ausgehen, so verhalten sich ihre Helligkeiten in entsprechenden Punkten zu entsprechenden Zeiten umgekehrt wie die vierte Potenz der zugehörigen R -Werte.“ — Daraus folgt, daß beim Schluß von Helligkeiten auf Entfernungen alle Objekte zu weit entfernt angesetzt werden, wenn man einfach mit quadratischer Ab-

nahme der Lichtintensität rechnet; z. B. sind Entfernungen der Größe $2 \cdot 10^8$ Lichtjahre, die auf die gewöhnliche Weise erhalten sind, durch 1,2 zu dividieren, da, wie die Beobachtungen zeigen, R in $2 \cdot 10^8$ Jahren um 10% wächst. Die Korrektur ist zu vernachlässigen gegenüber den zufälligen und systematischen Fehlern, mit welchen die Bestimmung von Entfernungen dieser Größenordnung heute noch behaftet ist. *O. Heckmann (Göttingen).*

Mineur, Henri: *La dynamique des masses variables d'après les lois de Newton et d'Einstein.* C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 663—666 (1931).

Schon in C. r. Acad. Sci. Paris **190**, 625 (1930) hat der Verf. ein Linienelement aufgestellt für die Umgebung einer zeitlich veränderlichen Masse. In der vorliegenden Note stellt er u. a. die Gleichungen für die geodätischen Linien im Felde einer solchen Masse auf, die — nach der Methode der Variation der Konstanten behandelt — einen Zusammenhang liefern zwischen der Zunahme der großen Halbachse der Bahn eines Massenpunktes und der Exzentrizität. Er findet

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{m} \cdot \frac{dm}{dt} \left(1 - \frac{2an}{c}\right),$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{an}{cem} \cdot \frac{dm}{dt} [\sqrt{1 - e^2} - (1 - e^2)]$$

(a große Halbachse, e Exzentrizität, m die zeitlich abnehmende Masse, n mittlere Bewegung des „Planeten“, c Lichtgeschwindigkeit). Wegen $0 < e < 1$, $dm/dt < 0$ folgt, daß e gleichzeitig mit a zunehmen muß. Um dieses Resultat auf den tatsächlich gefundenen Zusammenhang zwischen a und e bei Doppelsternbahnen anwenden zu können (im Mittel haben Doppelsternbahnen um so größeres e , je größer a ist), muß man allerdings eine um den Faktor 10^3 raschere Massenabnahme fordern, als es die bisherigen astrophysikalischen Auffassungen zulassen. — In der Newtonschen Mechanik existiert der behandelte Effekt auch bei Massenabnahme nicht. *O. Heckmann.*

Mathisson, Myron: *Die Mechanik des Materieteilchens in der allgemeinen Relativitätstheorie.* Z. Physik **67**, 826—844 (1931).

Für ein vom euklidischen unendlich wenig abweichendes Feld werden die Lösungen der Einsteinschen Gleichungen in der üblichen Weise behandelt und durch retardierte Potentiale integriert. Der Divergenzsatz entspricht den Erhaltungssätzen und liefert die Bewegungsgleichungen. Im Zusammenhang mit diesem Problem, insbesondere im Sinne von einschränkenden Bedingungen für die Existenz von Lösungen, werden einige Rechnungen angestellt. *Lanczos (Frankfurt a. M.).*

Tolman, Richard C., Paul Ehrenfest and Boris Podolsky: *On the gravitational field produced by light.* (Norman Bridge Laborat. of Phys., Pasadena, Calif.) Physic. Rev., II. s. **37**, 602—615 (1931).

Während gewöhnlich der Einfluß des Gravitationsfeldes auf Lichtstrahlen zur Darstellung gelangt, wird hier umgekehrt nach der Gravitationswirkung des Lichtes gefragt. Es wird der übliche elektromagnetische Spannungstensor als Materietensor angesetzt und die Einsteinschen Gravitationsgleichungen für unendlich schwache Felder in der bekannten Weise gelöst. Untersucht wird der Einfluß eines stationären Lichtstrahlenbündels wie auch eines Lichtimpulses auf die Metrik der Umgebung und darauf fußend die Wirkung, die auf einen weiteren als Probekörper dienenden Lichtstrahl sowie auf einen ruhenden materiellen Probekörper in der Nachbarschaft ausgeübt wird. Für die Rechnung wird der felderzeugende Lichtstrahl in seiner Länge begrenzt gedacht. Befindet sich der Probekörper gerade in der Mitte zwischen den beiden Enden, so ist in longitudinaler Richtung keine Wirkung da, wohl aber in transversaler Richtung eine Beschleunigung, die doppelt so groß ist, als wenn man elementar nach der Newtonschen Gravitation rechnet. In Hinblick auf die bekannte Lichtablenkung ist dieses Resultat in Übereinstimmung mit dem Impuls-Erhaltungsgesetz. Ähnlicherweise ergibt sich auch für den Fall eines Lichtimpulses für die totale Beschleunigung ein Betrag, den man auch nach dem Erhaltungsgesetz zu erwarten hat.

Lanczos (Frankfurt a. M.).

Finzi, B.: La relatività generale nei fenomeni di irradiazione atomico. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 119—124 (1931).

Die allgemeine Relativitätstheorie soll quantenmechanisch in der Weise berücksichtigt werden, daß sämtliche Formeln eine matrixenmäßige Umdeutung erfahren. Das Linienelement wird als das übliche ds^2 der g_{ik} hingeschrieben, wobei aber die g_{ik} ebenso wie die Variablen x_i und deren Differentiale dx_j alle Matrizen bedeuten sollen. Für diese Größen werden die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie als Zusammenhang zwischen dem Krümmungstensor und dem Materietensor formal unverändert übernommen. Für unendlich kleines \hbar werden alle Größen vertauschbar, und es resultiert für die Punktmechanik die gewöhnliche relativistische Mechanik, für endliches \hbar , aber sehr großes c resultiert die Heisenbergsche Mechanik. *Lanczos.*

Straneo, Paolo: La caratteristica singolarità delle maggiori sintesi della fisica moderna. (Istit. di Fis. Mat., Univ., Genova.) Scientia (Milano) 49, 267—280 (1931).

Eine gemeinverständliche Darstellung der Vereinheitlichungsbestrebungen in der modernen Physik; die Entwicklung der Quantentheorie und der Relativitätstheorie einschließlich der neuen Formulierung von Einstein werden besprochen. Zum Schluß wird eine vom Autor vorgeschlagene Form der neuen Relativitätstheorie skizziert.

K. Bechert (München).

Quantentheorie.

Neumann, J. v.: Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren. Math. Annalen 104, 570—578 (1931).

Die Arbeit behandelt die Frage, ob und in welchem Sinn behauptet werden kann, daß ein irreduzibles System von zwei hermiteschen Operatoren P, Q bis auf unitäre Transformationen festgelegt sei durch die quantenmechanische „Vertauschungsregel“

$$PQ - QP = \frac{\hbar}{2\pi i}. \quad (1)$$

Eine Formulierung, welche das Problem angreifbar gemacht hat (in der ursprünglichen Formulierung (1) ist das Problem nicht klar präzisiert, weil für P, Q „unbeschränkte“ Operatoren in Betracht kommen, die nicht überall definiert sind), ist von Weyl angegeben worden: Man bilde aus P, Q die unitären Operatoren

$$U(\alpha) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \alpha P}; \quad V(\beta) = e^{i\beta Q}; \quad (\alpha, \beta \text{ reelle Zahlen});$$

formale Operatorenrechnung führt dann zu den Beziehungen

$$U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha + \beta); \quad V(\alpha)V(\beta) = V(\alpha + \beta); \quad U(\alpha)V(\beta) = V(\beta)U(\alpha) \cdot e^{i\alpha\beta}. \quad (2)$$

Die Frage, ob die Lösung dieses Gleichungssystems (2) durch ein irreduzibles System unitärer Operatoren eindeutig sei (bis auf eine unitäre Transformation), besitzt nun einen völlig definierten Sinn. Durch die vorliegende Arbeit wird sie in positivem Sinne entschieden. Der Beweis ist auch übertragbar auf das entsprechende Eindeutigkeitsproblem für die quantenmechanischen Vertauschungsregeln eines Systems von mehreren „Impulsoperatoren“ P_k mit zugehörigen „Koordinatenoperatoren“ Q_k . — Die Beweis methode besteht in einer sinn gemäßen Übertragung der Frobeniusschen Behandlung endlicher Gruppen mittels ihrer „charakteristischen Einheiten“ und der von Peter und Weyl ausgeführten Untersuchung abgeschlossener kontinuierlicher Gruppen mittels ihrer „Gruppennzahlen“; eine Methode, die eben dadurch anwendbar geworden ist, daß das Problem in der durch (2) gegebenen Formulierung zu einem gruppentheoretischen Darstellungsproblem geworden ist. *P. Jordan (Rostock).*

Brose, H. L., and E. H. Saayman: A note on Heisenberg's relation. Philosophic. Mag., VII. s. 11, 980—986 (1931).

Die Verf. zeigen, daß die quantenmechanischen Matrixlösungen des harmonischen linearen Oszillatorproblems auch ohne Vertauschungsrelationen aus der alten Heisenbergschen Forderung folgen, die Koordinaten und Impulse seien zur Wahrung der

Bohrschen Frequenzbedingung als Hermitesche Matrizen von Fourierkoeffizienten aufzufassen. Dabei bleibt jedoch eine gemeinsame additive Konstante der Energieeigenwerte unbestimmt, welche die nachträglich abgeleiteten Vertauschungsrelationen beeinflusst. *Fues (Hannover).*

Gupta, Sisirendu: Momenten- und Virialgleichung in der Diracschen Wellenmechanik. (*Dep. of Applied Math., Univ. Coll. of Sci., Calcutta.*) Z. Physik 68, 573 bis 576 (1931).

Die aus den quantenmechanischen Bewegungsgleichungen der Diracschen Theorie folgende „Momentengleichung“

$$\frac{d}{dt} \int \bar{\psi} \left([\mathbf{r}' \cdot \mathfrak{P}] + \frac{\hbar}{4\pi} \sigma \right) \psi dV = \int \bar{\psi} \left[\mathbf{r}' \cdot \left(-e\mathfrak{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{i}' \cdot \mathfrak{S}] \right) \right] \psi dV$$

($\sigma_x = -i\alpha_2\alpha_3$ usw; sonstige Bezeichnungen wie üblich) wird vom Verf. durch direkte Rechnung abgeleitet. Ferner wird auf die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int \bar{\psi} (\mathbf{r} \cdot \mathfrak{P}) \psi dV = \int \bar{\psi} \left\{ \mathbf{r} \cdot \left(-e\mathfrak{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{i}' \cdot \mathfrak{S}] \right) \right\} \psi dV + c \int \bar{\psi} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathfrak{P}) \psi dV$$

hingewiesen, welche als „Virialgleichung“ angesprochen wird. *V. Fock.*

Fermi, E.: Sul calcolo degli spettri degli ioni. Nuovo Cimento, N. s. 8, 7–14 (1931).

Anwendung der von demselben Autor entwickelten Methode des entarteten Elektronengases zur Berechnung der Energieniveaus ionisierter Atome. Die den Kern umgebenden Elektronen werden durch eine Wolke entarteten Elektronengases schematisiert. Die Dichte des Elektronengases an einer bestimmten Stelle hängt vom elektrischen Potential ab in einer Weise, die bereits in einer früheren Arbeit des Autors angegeben wurde [*Rend. Lincei* 6, 602 (1927)]. Durch Einsetzen dieser Dichte in die Poissonsche Differentialgleichung, der das Potential genügen muß, erhält man eine Differentialgleichung für das Potential allein. Aus dem Atommodell ergeben sich einschränkende Bedingungen für das gesuchte Potential. Die Berechnung desselben geschieht auf numerischem Wege. Die Methode wird zur Berechnung der Rydberg-Korrekturen (und damit der Termwerte) von *S*-Termen dreifach ionisierter Atome verwendet. Dazu muß man zuerst das Potential angeben, das auf das Leuchtelektron wirkt; es ergibt sich in einfacher Weise aus dem vorher genannten Potential. Mit dem gefundenen Ausdruck geht man in die Schrödinger-Gleichung des Leuchtelektrons ein und sucht (auf numerischem Wege) die Eigenfunktion, die zum Eigenwert Null (Quantenzahl unendlich) gehört. Durch Vergleich mit der Eigenfunktion des entsprechenden wasserstoffähnlichen Problems erhält man die Rydberg-Korrektur. Die Resultate stimmen mit den empirischen Daten sehr gut überein, viel besser als für den Fall neutraler Atome, den der Autor bereits früher behandelt hatte. *K. Bechert.*

Slater, John C., and John G. Kirkwood: The van der Waals forces in gases. (*Massachusetts Inst. of Techn., Cambridge.*) Physic. Rev., II. s. 37, 682–697 (1931).

Quantenmechanisches Rechenverfahren für Störungsprobleme nichtentarteter Systeme (von ν Elektronen). Die gestörte Eigenfunktion ψ wird in folgender Weise dargestellt: $\psi = \psi_0(1 + \Phi)$, worin ψ_0 die ungestörte Eigenfunktion bedeutet. Für Φ wird ein Ansatz gemacht, der zwar nicht begründet, aber plausibel gemacht wird: $\Phi = v \cdot R(r)/E_0$ (v Störungspotential, R eine Funktion der Kernabstände der Elektronen, E_0 ungestörter Eigenwert). Mit diesen einfachen Ansätzen können Störungsprobleme des H-Atoms behandelt werden. Für Atome mit mehreren, kugelsymmetrisch verteilten Elektronen wird die ungestörte Eigenfunktion als Produkt von passenden Funktionen des Kernabstandes je eines Elektrons angesetzt. Das Störungspotential läßt sich immer als Summe über Beiträge jedes einzelnen Elektrons schreiben. Als naheliegende Verallgemeinerung des angegebenen Ansatzes für die Störung der Eigenfunktion wird eine Produktsumme über die Beiträge jedes Elektrons zum Potential mit einer Funktion seines Kernabstandes gebildet. Beispielsweise gilt im Falle des

He-Atoms im elektrischen Felde: $v = \sum v_j$, $\Phi = 1/E_0 \sum v_j R(r_j)$. Die Wellengleichung für Φ ergibt sich zu:

$$\Delta \Phi + 2 \sum_{j=1}^{3\nu} \frac{\partial \log \psi_0}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - K^2 v = 0.$$

Sie kann in den meisten der hier behandelten Fälle durch direkte Rechnung gelöst werden. Es erweist sich aber als bequemer und praktisch ebenso genau, die Lösung durch einen Ansatz mit unbekannten Parametern und Bestimmung derselben aus dem Variationsproblem der Wellengleichung vorzunehmen. Aus der gestörten Eigenfunktion erhält man in bekannter Weise die Eigenwertstörung 2. Ordnung. Nach dieser Methode werden folgende Probleme behandelt: Polarisierbarkeit von H und von He; Wechselwirkung zweier H-Atome und zweier He-Atome. Die Ergebnisse stimmen mit früher gerechneten, soweit solche vorhanden sind, befriedigend überein. Es wird ein Zusammenhang von Polarisierbarkeit und van der Waalsschen Kräften abgeleitet und in genügender Übereinstimmung mit der Erfahrung auf die Reihe der Edelgase angewendet.

Eisenschütz (Berlin).

Majorana, Ettore: Sulla formazione dello ione molecolare di elio. Nuovo Cimento, N. s. 8, 22–28 (1931).

Ein normales He-Atom und ein He^+ -Ion im Grundzustand können ein He_2^+ -Ion bilden. Eine Abschätzung liefert den Kernabstand und die Schwingungsfrequenz in (wohl etwas zufälliger) guter Übereinstimmung mit den aus dem He_2 -Spektrum bekannten Werten und die Bindungsenergie, die experimentell noch nicht bekannt ist.

F. Hund (Leipzig).

Stern, T. E.: The symmetric spherical oscillator, and the rotational motion of homopolar molecules in crystals. Proc. roy. Soc. Lond. A 130, 551–557 (1931).

Ein homopolares Molekül in einem axialsymmetrischen Kraftfeld wird durch 2 Koordinaten Θ und φ beschrieben. Das Kraftfeld soll in erster Näherung durch das Potential ($V = V_0(1 - \cos 2\vartheta)$) repräsentiert werden. Die Schrödingergleichung wird durch den Ansatz $\psi = F(\Theta) e^{im\varphi}$ separiert. m nimmt positive und negative ganzzahlige Werte einschließlich Null an. Setzt man zur Abkürzung

$$\mu = \frac{8\pi^2 I}{h^2} (W - 2V_0); \quad \lambda^2 = \frac{16\pi^2 I}{h^2} V_0; \quad x = \cos \Theta,$$

so ist der von x (bzw. Θ) abhängige Teil der Schrödingergleichung:

$$(1 - x^2) F'' - 2x F' + \left(\mu + \lambda^2 x^2 - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) F = 0.$$

Setzt man $F = (1 - x^2) M/2y$, so ergibt sich für y eine Potenzreihe nach x , die entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen enthält. Für die Eigenwerte μ hat man für kleine λ brauchbare Kettenbruchgleichungen, mit deren Hilfe die μ durch 2 Quantenzahlen m und n für bestimmte λ numerisch berechnet werden können. Für $\lambda = 0$ ergeben sich die Eigenwerte des räumlichen Rotators. Bei wachsendem λ bleibt die Quantenzahl m erhalten, ebenso die Symmetrieeigenschaften, die Bedeutung der Quantenzahl n geht verloren. Für $\pm m$ ist der Eigenwert derselbe. Für große λ gibt es einen asymptotischen Ausdruck:

$$\mu \sim -\lambda^2 + 2\lambda(r + M + 1) + O(1/\lambda),$$

worin $O(1/\lambda)$ Glieder von der Größenordnung $1/\lambda$ bedeutet und r eine Quantenzahl ist, die nur gerade ganzzahlige Werte annimmt. Für $\lambda = \infty$ wird diese Eigenwertdarstellung mit der des ebenen Oszillators identisch. Es ist dann:

$$W = h\nu_0(N + 1), \quad \text{wenn} \quad \nu_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{V_0}{I} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ist.}$$

Die zu N gehörigen Eigenwerte sind entartet, entsprechend der Zerlegbarkeit von N in die Summanden M und r , wobei zu jedem $M > 0$ noch zwei Eigenfunktionen gehören. Die Anwendbarkeit des behandelten Modells auf die Rotationsbewegungen

homopolarer Moleküle in Kristallen wird kurz diskutiert. Die Bewegung ist vom Typ einer Rotation für $W > 2V_0$, für $W < 2V_0$ vom Typ einer Oszillation. *Weizel*.

Roess, Louis C.: The mass absorption coefficient of the *K* shell according to the Dirac relativistic theory of the electron. *Physic. Rev.*, II. s. 37, 532—555 (1931).

Der Verf. berechnet den Photoeffekt in der *K*-Schale nach der Dirac-Gleichung, ohne dabei die Retardierung der Lichtwelle zu berücksichtigen. Diese von den üblichen Vorstellungen abweichende Näherungsweise wird nicht weiter begründet. Ferner behauptet der Verf., daß die Absorption für 2 *K*-Elektronen wegen des Pauli-Prinzips nicht den doppelten, sondern den einfachen Elektroneneffekt ergibt, eine Behauptung, die durch elementare Betrachtungen nahegebracht wird, aber bekanntlich im Widerspruch zu den wellenmechanischen Rechnungen steht. *L. Landau* (Zürich).

Bailey, V. A.: Die Theorien von G. Hertz über die Bewegungen langsamer Elektronen in Gasen. *Z. Physik* 68, 834—842 (1931).

Verf. beschäftigt sich in eingehender Kritik mit den verschiedenen Arbeiten von G. Hertz über die Bewegung langsamer Elektronen in Gasen und kommt zu folgenden Schlüssen: 1. Die Diffusionsgleichung von G. Hertz ist nur eine spezielle Form der Maxwell'schen Diffusionsgleichung, wenn man die nicht zutreffende Annahme hinzufügt, daß die Elektronen bei ihren Zusammenstößen mit Molekülen keine Energie verlieren. 2. Hertz hat die Arbeiten von J. S. Townsend über den gleichen Gegenstand nicht berücksichtigt, in denen die einschlägigen Fragen zum Teil schon vollkommen erledigt wurden. 3. Die von Hertz in die Theorie der Elektronendiffusion eingeführten Annahmen sind unrichtig. 4. Den Beweis dafür, daß sich langsame Elektronen und Heliumatome beim Zusammenstoß wie vollkommen elastische Kugeln verhalten, haben bereits Townsend und der Verf. 1923 erbracht, während die Argumente für diese Tatsache, die Franck und Jordan in ihrem Buche „Anregung von Quantensprüngen durch Stöße“ darlegen, für das Problem nicht einmal von qualitativer Bedeutung sind. *Sextl* (Wien).

Goldstein, L.: Mécanique quantique des choes de seconde espèce. *C. r. Acad. Sci. Paris* 192, 732—734 (1931).

Durch eine quantenmechanische Störungsrechnung wird das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für Stöße erster und zweiter Art bei unendlich schwacher Wechselwirkung zwischen den stoßenden Systemen in Übereinstimmung mit den Forderungen der thermodynamischen Statistik gefunden. [Vgl. übrigens P. A. M. Dirac, *Proc. roy. Soc. A.* 114, 260 (1927), wo sich eine ähnliche Betrachtung findet.] *O. Klein* (Stockholm).

Wolfe, Hugh C.: Scattering of high velocity electrons in hydrogen as a test of the interaction energy of two electrons. (*California Inst. of Techn., Pasadena.*) *Physic. Rev.*, II. s. 37, 591—601 (1931).

Der Verf. berechnet die Streuung schneller Elektronen an Wasserstoffatomen für den Fall, daß Elektron und Proton des Wasserstoffatoms gegenüber dem Stoßelektron als praktisch frei angesehen werden können. Hierfür wird auch ein Kriterium angegeben. Nachdem ein eindeutiger und konsequenter Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie zweier Diracschen Elektronen ein noch ungelöstes Problem in der noch unbekannten Quantenelektrodynamik darstellt, rechnet Verf. gleich nach 3 probeweise versuchten Ansätzen für diese Wechselwirkungsenergie. Nämlich: 1. Alleinige Coulombsche Wechselwirkung, 2. Coulombsche und Spinwechselwirkung, 3. 1. + 2., ferner eine von Breit herrührende Berücksichtigung der Retardierung der Potentiale, die letzterer sowohl korrespondenzmäßig als auch auf Grund der Heisenberg-Paulischen Quantenelektrodynamik zu begründen versuchte. In den Resultaten — die Streuformeln unterscheiden sich voneinander um Terme von der Größenordnung v^2/c^2 — widerspiegelt sich naturgemäß die Vieldeutigkeit des Wechselwirkungsenergie-Ansatzes. Die Arbeit schließt mit einer kurzen Diskussion der Möglichkeit der experimentellen Prüfung der beziehungsweisen Entscheidung zwischen den 3 erhaltenen Streuformeln.

E. Guth (Leipzig).

Born, M., und V. Weisskopf: Quantenmechanik der Adsorptionskatalyse. Z. physik. Chem. B 12, 206—227 (1931).

Es wird der Übergang eines Systems von einem metastabilen Zustand in einen stabilen behandelt, wobei der zwischen beiden befindliche Potentialberg aus zwei sich schneidenden Parabeln besteht. Dabei wird der Energieaustausch mit den Schwingungen eines festen Körpers wesentlich in Betracht gezogen. Landau (Leningrad).

Ehrenberg, W., und H. Hönl: Zur Theorie des elektrischen Kontaktes. (Phys. Inst. u. Inst. f. Theoret. Phys., Techn. Hochschule, Stuttgart.) Z. Physik 68, 289—308 (1931).

Bekanntlich ist es nach der Quantenmechanik für Elektronen möglich, eine Potentialschwelle zu überschreiten, selbst wenn ihre Energie geringer ist als der Maximalwert des Potentials in der Schwelle. Die Verf. wenden dieses Ergebnis zur Deutung des Stromdurchgangs durch Kontaktstellen an. Die Elektronen in beiden Leiterenden werden als frei betrachtet, das Nullniveau des Potentials in dem einen Ende liegt höher als das in dem anderen Ende, die zwischen beiden befindliche Schwelle ist dem Gradient des elektrischen Feldes entsprechend abgeschrägt. Unter der Annahme, daß das Elektronengas nach der Dirac-Fermischen Statistik entartet sei, wird die Zahl der Elektronen berechnet, die aus dem einen Leiter in den anderen per Sekunde übergeht. Es zeigt sich, daß bei gegebenem Spannungsunterschied die Stromstärke bis zu einer Breite der Schwelle von 10 Å nahezu konstant bleibt und dann bei größerer Entfernung der Leiterenden sehr rasch abfällt. Die Rechnung wird sowohl für den Fall von zwei gleichen als auch für den Fall von zwei verschiedenen Metallen ausgeführt. Eine Erklärung der Detektorwirkung kann auf Grund der gemachten Annahmen nicht gegeben werden.

R. de L. Kronig (Groningen).

Heitler, W., und G. Rumer: Quantentheorie der chemischen Bindung für mehratomige Moleküle. (Inst. f. Theoret. Phys., Univ. Göttingen.) Z. Physik 68, 12—41 (1931).

Die quantentheoretische, bisher für 2atomige Moleküle entwickelte Valenztheorie (zusammenfassender Bericht Heitler, Physik. Z. 31, 185 (1930)) wird für mehratomige Moleküle erweitert. Die Berechnung der Wechselwirkungsenergie (Ww.-Energie) von in bestimmten Zuständen befindlichen Atomen beschränkt sich auf die erste Näherung im Sinne der Störungsrechnung nach der Heitler-London'schen Methode. Polarisation ist daher vernachlässigt. Die Ww.-Energie setzt sich in dieser Näherung zusammen aus der Coulombschen Energie der ungestörten Atome und der Austauschenergie. Die Theorie beschränkt sich im wesentlichen auf in S-Zuständen befindliche Atome, doch ist sie mit einer gewissen Erweiterung auch für nicht in S-Zuständen befindliche Atome anwendbar, wenn die Nachbarn eines nicht im S-Zustand befindlichen Atoms im S-Zustand sind und mit ihm auf einer Geraden liegen. Im Falle der Wechselwirkung zweier Atome A, B mit den resultierenden Spins s_a , s_b ist die Ww.-Energie lediglich durch den resultierenden Spin bestimmt, der die Werte $s = s_a + s_b$, $s_a + s_b - 1, \dots, |s_a - s_b|$ annehmen kann. Sie drückt sich aus durch die von den vorliegenden Atomen, ihrem Abstand und ihren Zuständen abhängigen Austauschintegrale (A.J.):

$$\varepsilon = J_E + [(s_a + s_b) + (s_a - s_b)^2 - s^2 - s] J - s_a/2 \sum_{\text{Paarel. von B}} J_{P_b} - s_b/2 \sum_{\text{Paarel. von A}} J_{P_a} - 2 \sum_{\text{Paarel. von A u. B}} J_{P_a P_b}$$

(J_E Coulombsche Energie, J A.J. zwischen den Leuchtelektronen, J_{P_a} A.J. zwischen Leuchtelektronen von B mit Paarelektronen von A usw.). Die Wirkung von Paarelektronen wird vernachlässigt, wenn sie tieferen Schalen angehören. J wird nicht wirklich in jedem Falle ausgerechnet, sondern in Analogie zu den Fällen, wo es berechnet wurde, als < 0 , und $|J| \gg |J_E|$ für kleine Entfernungen angenommen. Die Annahme über J wird rückwärts durch die Erfahrung bestätigt. Dann bedeutet Koeffizient von J : > 0 Anziehung (Molekülbildung), < 0 Abstoßung. Da die Nichtorthogonalität der Eigenfunktionen vernachlässigt wird, so braucht im Falle mehratomiger Moleküle nur der Austausch zwischen Atompaaren berücksichtigt zu werden; daher treten hier nur dieselben A.J. auf, wie bei 2atomigen Molekülen; die Ww. bei mehratomigen kann also aus der bei 2atomigen Molekülen abgeleitet werden. Die Ww.-Energie ist hier aber nicht mehr durch s allein bestimmt, da im allgemeinen zu gegebenem s mehrere Zustände gehören. Ihre Zahl ergibt sich aus dem Vektormodell. Zur Bestimmung der durch die Ww. entstehenden Terme wird das Slatersche Verfahren angewendet im Anschluß an eine von Born [Z. Physik. 64, 729 (1930)] gegebene Darstellung. Bei diesem werden, im Gegensatz zu der früher üblichen Behandlung der Ww. mit Hilfe der Permutationsgruppe, vor Aufstellung der Störungsmatrix die Spinvariablen der Elektronen eingeführt unter Vernachlässigung magnetischer Kräfte. Dadurch wird es

möglich, schon vor Ausführung der Störungsrechnung dem Pauli-Prinzip zu genügen. Zu jeder Ausgangsfunktion gehört ein bestimmter Wert σ der Komponente des Spins s in einer Richtung (nach „rechts“). Die Störungsmatrix H zerfällt in Teilmatrizen H_σ nach Werten von σ . Die Elemente von H_σ enthalten nur A.J. zwischen Atompaairen mit Koeffizienten, die nur von den Spinkomponenten $\sigma_a, \sigma_b, \dots$ und den resultierenden Spins s_a, s_b, \dots der getrennten Atome abhängen. Für gegebenes s kann σ die gequantelten Werte $-s, \dots, +s$ annehmen. Da die Energie nicht von σ abhängt, sind alle Eigenwerte von H_σ auch Eigenwerte von $H_{\sigma-1}$. Das ermöglicht die Bestimmung der zu den Eigenwerten gehörigen s -Werte. Sind ε_σ die Wurzeln von H_σ und p deren Zahl, so ist eine Bestimmung der Wurzeln auf Grund der Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum \varepsilon_\sigma &= \text{Spur von } H_\sigma, \\ \sum \varepsilon_\sigma^2 &= \text{Spur von } H_\sigma^2, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum \varepsilon_\sigma^p &= \text{Spur von } H_\sigma^p\end{aligned}$$

möglich. Für hohe Grade p ist aber die Berechnung sehr kompliziert. Die gesamte Matrix läßt sich nicht nur nach Werten von σ , sondern gleichzeitig nach solchen von s reduzieren. Jedes H_σ zerfällt in Teilmatrizen $H_{s\sigma}$ ($\sigma \leq s$). Sind $\psi_{r_a, r_b, \dots}, \psi_{r'_a, r'_b, \dots}$ die Eigenfunktionen zu σ (r_a Anzahl der Spins nach rechts: $r_a = \sigma_a + n_a/2$; n_a Anzahl der Nichtpaarelektronen im Atom A usw.; $r_a + r_b + \dots = r'_a + r'_b + \dots = r = \sigma + n/2$; $n = n_a + n_b + \dots$), so ergeben geeignete Lineartransformationen dieser Funktionen Zerfall von H_σ in $H_{s\sigma}$ nach Werten von s . Der Grad p der $H_{s\sigma}$ ergibt sich aus dem Vektormodell. Da Spin und Koordinaten als ungekoppelt angesehen werden, läßt sich die Reduktion auf Grund der Transformationseigenschaften des Spinraums gegenüber Drehungen allein ausführen. Ist D eine solche Drehung und sind ψ_r ($r = 1, \dots, f$) zunächst für ein Atom die zu σ gehörigen Eigenfunktionen zum gleichen Eigenwert, so transformieren sich die ψ_r gemäß einer Darstellung der Drehungsgruppe

$$D\psi_r = \sum_j a_{r,r'}^p \psi_{r'},$$

wo $(a_{r,r'}^p)$ eine f -reihige, unitäre Matrix mit der Determinante 1 ist, die von D abhängt. Für ein Elektron ist nach Pauli die Darstellung zweireihig ($f = 2$), D ist eine lineare unitäre Transformation in zwei komplexen Dimensionen. Es gilt $(a_{r,r'}^p)$ durch eine von D unabhängige Transformation so zu reduzieren, daß die ψ_r in Gruppen zerfallen, die sich nur in sich transformieren. Aus der zweireihigen irreduziblen Darstellung lassen sich mehrreihige gewinnen. Zu jeder ganzen oder halbganzen Zahl s gibt es eine $2s + 1$ -reihige irreduzible Darstellung $a_{r,r'}^{2s}$. Transformieren sich die Eigenfunktionen gemäß dieser, so hat das System den Spin s . Die Eigenfunktionen bilden eine Basis der Darstellung (Kovariante $2s$ -ter Stufe). Sind x_1, x_2 die Basisfunktionen der zweireihigen Darstellung, so bilden die Monome

$$x_1^{2s}, x_1^{2s-1} x_2 \sqrt{\binom{2s}{1}}, x_1^{2s-2} x_2^2 \sqrt{\binom{2s}{2}}, \dots, x_2^{2s}$$

die Basis der $2s + 1$ -reihigen irreduziblen unitären Darstellung. Zu

$$x_1^{2s-(2s-r)} x_2^{2s-r} \sqrt{\binom{2s}{r}} = x_1^r x_2^{2s-r} \sqrt{\binom{2s}{r}}$$

gehört $\sigma = r - n/2$. Die ψ_r transformieren sich wie diese Monome. Für mehrere Atome mit s_a, s_b, \dots transformieren sich im Gesamtsystem ohne Ww. die $\psi_{r_a, r_b, \dots}$ wie die Produktmonome

$$x_1^{r_a} x_2^{n_a-r_a} y_1^{r_b} y_2^{n_b-r_b} \dots \sqrt{\binom{n_a}{r_a}} \sqrt{\binom{n_b}{r_b}} \dots$$

Die hierdurch vermittelte Darstellung ist reduzibel. Durch passende Linearkombination dieser Produktmonome, wobei nur solche miteinander zu kombinieren sind, die zu gleichem $r = \sigma + n/2$ gehören, erhält man von jeder irreduziblen Darstellung a diejenigen Basisfunktionen, $\psi_{s\sigma}$, die zu dem betreffenden s gehören. Sind diese gefunden, so ist durch Transformation der Säkularmatrix auf diese Funktionen die Reduktion vollzogen. Die gesuchten Linearkombinationen müssen folgende Eigenschaften haben: 1. Der Index 1 muß in jedem Glied $r = \sigma + n/2$ mal vorkommen. 2. Sie müssen in x, y, \dots , vom Grade n_a, n_b, \dots sein. 3. Sie müssen zur Basis der $2s + 1$ -reihigen Darstellung gehören. Für jedes s genügt die Bestimmung für einen Wert von σ , da die Energie von σ nicht abhängt. Es werden der Reihe nach die Fälle $s = 0, 1/2, 1$ diskutiert. Für $s = 0$ ist $\sigma = 0$. Die Darstellung ist die Einheit. Für zwei Atome gibt es nur eine algebraische Invariante $[xy] = x_1 y_2 - y_1 x_2$. Sie erfüllt die Bedingungen 1. und 2., 3. aber nur, wenn $n_a = n_b = 1$ (zwei einwertige Atome). Für $n_a = n_b = n$ (zwei nwertige Atome) erfüllt $[xy]^n$ die Bedingungen. Für $s = 1/2$ muß sich die Basisfunktion wie x_1, x_2 selbst transformieren. Für $\sigma = +1/2$ bildet x_1 oder y_1, \dots eine entsprechende Kovariante. Um den richtigen Grad zu erhalten (Bedingung 2), muß man noch mit Invarianten multiplizieren. Die Kovarianten sind:

$$x_1[xy][xz], \quad y_1[xy][xz], \quad z_1[xy]^2,$$

wovon aber nur zwei linear unabhängig usw. Für mehrere Atome gibt es zu s, p linear unabhängige Invarianten; für ihre Bestimmung konnte kein allgemeines Prinzip gefunden werden.

Die Ausmultiplikation dieser In- und Kovarianten liefert die gesuchten Linearkombinationen der Produktmonome, denen die $\psi_{s\sigma}$ der $\psi_{r_a, r_b, \dots}$ entsprechen. Die $\psi_{s\sigma}$ sind noch zu orthogonalisieren und zu normieren. Eine Invariante $[xy]$ entspricht dem Bilden eines Lewisschen Elektronenpaares. Als Beispiel der allgemeinen Theorie wird das HCN durchgerechnet unter der Annahme des C-Atoms als vierwertig (5S -Zustand). Für Moleküle mit größerer Atomzahl werden die Säkularprobleme von hohem Grad und lassen sich nur lösen, wenn die A.J. numerisch bekannt sind. Man kann dann dennoch zu physikalischen Aussagen gelangen, wenn man die Lösung für größere Entfernung bestimmter Atomgruppen kennt, indem man zuerst diese Atomgruppen getrennt behandelt und erst in nächster Näherung ihre Ww. einführt. Als Beispiel hierfür wird das Hydrazin H_2N-NH_2 behandelt. Resultate: I. Ein n -wertiges Atom A. Atom B_1 m_1 -wertig, B_2 m_2 -wertig usw. $\sum m_i \leq n$. Ww.-Energie:

$$\varepsilon = J_E + m_1(A B_1) + m_2(A B_2) - \dots - m_1 m_2 (B_1 B_2) - \dots$$

(AB_1 A.J. zwischen A und B_1 usw.). Alle B_i werden von A angezogen, die B_i stoßen sich ab. Spezialfall: die Reihe CH_4 , CH_3 , ...; CH_4 ist wegen Abstoßung der H-Atome ein Tetraeder. Jedes folgende H ist schwächer gebunden als das vorhergehende. CH_5 mit $\sum m_i > n$ ($5 > 4$): das 5-te H wird abgestoßen. HCN. $\varepsilon = J_E + 3(CN) + (CH) - 3(NH)$ entsprechend der Formel $H-C \equiv N$. Iso-Form $C \equiv N-H$ oder $>C \equiv N-H$. Erste Form abgeleitet aus zweiwertigen C (3P -Zustand), zweite Form aus vierwertigem mit zwei freien Valenzen ($s=1$). Die Stabilität wird gezeigt. II. A_n n -wertig. H Repräsentant eines einwertigen Atoms. Molekül $H-A \equiv A-H$. Bei Spaltung zwischen den beiden A-Atomen Anziehung zwischen den beiden AH-Gruppen, wenn $n \geq 2$. Bei Abtrennung der beiden H-Atome bleibt gesättigtes A_2 -Molekül übrig. Bei Annäherung der H-Atome an dieses tritt zunächst Abstoßung, dann Anziehung auf. Zur Bindung ist also die Überwindung einer Aktivierungsenergie nötig. III. CNOH. Gewöhnliche Form, nur in gewissen Derivaten realisiert $H-O-C \equiv N$; Iso-Form $O=C \equiv N-H$. O nicht in S -Zustand, sondern in 3P . Es ist zu unterscheiden zwischen Σ und Π Molekülzuständen, und der Austausch mit dem Elektronenpaar des O ist zu berücksichtigen. Die Iso-Form ergibt sich als stabil, bei der gewöhnlichen Form hängt die Stabilität von den numerischen Werten der A.J. ab. IV. H_2N-NH_2 ; $CN-CN$. Die Theorie ergibt für große Entfernung Abstoßung zwischen den beiden NH_2 -, bzw. CN -Gruppen im Widerspruch mit der chemischen Erfahrung. Es wird diskutiert, daß theoretisch für kleinere Entfernungen wieder Anziehung möglich ist. E. Hückel (Stuttgart).

Astronomie und Astrophysik.

Steppes, O.: Fehler, die bei Aufgaben der nautischen Astronomie durch die Art der Rechnung entstehen. Ann. Hydrogr. 59, 174—176 (1931).

Stracke, G.: Zur genäherten Bahnverbesserung der Kleinen Planeten. Astron. Nachr. 242, 1—8 (1931).

Es wird vorausgesetzt, daß zur Verbesserung der Bahnelemente Beobachtungen aus mindestens 4, möglichst gleichmäßig über die Bahn verteilten Oppositionen verfügbar sind. Eine Verbesserung der Knotenlänge und der Bahnneigung ist dann in den seltensten Fällen erforderlich. Für die 4 übrigen Bahnelemente μ , φ , ω , M lassen sich die Bedingungsgleichungen i. A. in die Form

$$l d\mu + m d\varphi + n d\omega + o dM = \cos \delta d\alpha$$

bringen, wo l , m , n , o Funktionen der Zeit, der geozentrischen Distanz und der Bahnelemente des Planeten sind. Zur Herabsetzung des Arbeitsaufwandes bei der numerischen Rechnung werden diese Koeffizienten, soweit sie von der mittleren Anomalie M und dem Exzentrizitätswinkel φ abhängen, tabuliert und zwar für Exzentrizitätswinkel von 0° bis 30° . Die beigegebenen 3 Tafeln enthalten die Koeffizienten

$$f_\varphi = \left(\cos \varphi + \frac{r}{a} \sec \varphi \right) \sin v; \quad f_\omega = \frac{r}{a}; \quad f_M = \frac{a}{r} \cos \varphi.$$

A. Klose (Berlin).

Jekhowsky, B.: Ensemble des formules pour déterminer l'orientation j du grand cercle de recherche des astéroïdes. (Observ., Bordeaux.) Astron. Nachr. 242, 15—16 (1931).

Kurze Zusammenfassung der Ergebnisse einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 1, 108) über die Ableitung der „Variation“ bei einer Planetenephemeride. Die besonders einfachen Formeln werden noch einmal auf kurze und elegante Art entwickelt.

K. Stumpff (Breslau).

Bottlinger, K. F.: Die Rotation der Milchstraße. *Naturwiss.* 1931 I, 297—301.

Der Verf. gibt eine allgemeinverständliche Darstellung der dynamischen Vorgänge im Milchstraßensystem. Verschiedene Untersuchungen, insbesondere die Lindblad-Oortsche Rotationshypothese werden besprochen. An einem Diagramm erklärt der Verf. die Streuung der Geschwindigkeit von Sternen mit elliptischen Bahnen in bezug auf einen Stern mit Kreisbahn. Die Geschwindigkeitskurven sind elliptisch (Achsenverhältnis 1 : 2, wobei die größere Achse radial gerichtet ist), solange die Bahnexzentrizitäten klein sind. Sind diese aber groß, so werden die Geschwindigkeitskurven deformiert und zeigen eine asymmetrische Anordnung, ohne sich jedoch zu überschneiden; ihr Mittelpunkt wird mäßig verschoben. Aus dem Diagramm sieht man, daß der gegenwärtige Abstand der Sonne vom Zentrum des Systems (Shapleysches Zentrum) etwas kleiner ist, als ihre Bahnachse, und daß ihre Bahnexzentrizität den Wert 0,1 etwas überschreitet. Die Mira-Sterne und die kurzperiodischen Cepheiden bewegen sich in Ellipsen, deren Exzentrizitäten um 0,7—0,8 liegen und deren Bahnachsen ungefähr $0,6 R$ betragen (R bedeutet den Radius der Kreisbahn eines Idealsterns). Zum Schluß werden einige Probleme (Local Cluster, Sternströme), die durch die Rotationshypothese noch nicht völlig geklärt wurden, besprochen.

L. Hufnagel (Berlin).

Stoner, Edmund C., and Frank Tyler: A note on condensed stars. (*Phys. Dep., Univ., Leeds.*) *Philosophic. Mag.*, VII. s. 11, 986—995 (1931).

Es werden ergänzende Betrachtungen, insbesondere Anwendungen der Resultate zweier früheren theoretischen Abhandlungen (*Philos. Mag.* Jan. 1929 und May 1930) über dichte Sterne des weißen Zwergtypus dargelegt. Diese Sterne betrachten die Verf. als aus vollständig ionisierten Atomen von der Temperatur des absoluten Nullpunktes bestehend, für Sterne deren Masse kleiner als die Hälfte der Sonnenmasse ist, leiten sie eine einfache Gleichgewichtsbedingung ab. Für Sterne, deren Masse gleich oder kleiner als die Hälfte der Sonnenmasse ist, die aber nicht vollständig dicht (ionisiert) sind, gilt eine polytrope Dichteverteilung, die mittlere Grenzdichte ist ungefähr gleich der Hälfte der Grenzdichte eines Sternes mit gleichförmiger Dichteverteilung. Bei Sternen größerer Masse ist die mittlere Dichte auch klein, doch ist es nicht möglich, näheres über die Grenzgröße solcher Sternmassen auszusagen. Bei vollständig dichten Sternen wird die Gleichgewichtsmasse für eine gegebene Konzentration kleiner sein als bei einem Stern gleichförmiger Dichteverteilung, und zwar um einen Betrag, der mit dem Verhältnis der Zentral- zur mittleren Dichte wächst. Die mittlere Gleichgewichtsdichte weicht nur wenig von der für einen Stern gleichförmiger Dichte und derselben Masse berechneten ab. Sterne, deren Masse größer ist als die Gleichgewichtsmasse für eine gegebene mittlere Dichte werden einer Kontraktion unterworfen sein und infolgedessen wird ihre Temperatur wachsen, dabei werden sie durch Ausstrahlung Masse verlieren.

Hubert Slouka (Prag).

Thomas, L. H.: Stellar structure. (*Dep. of Phys., Ohio State Univ., Columbus.*) *Nature* (Lond.) 1931 I, 441.

Verf. versucht die Helmholtzsche Kontraktionstheorie auf Grund moderner Theorien des Sterninnerns zu verteidigen. Die starke Konzentration der Sternmasse gegen das Sterninnere, die Milne als notwendige Erklärung des Sternaufbaues betrachtet, stellt eine 50mal größere Energieentwicklung, als früher gedacht wurde, zur Verfügung. Setzt man eine Änderung der Opazität der Sternmaterie gemäß $T^{-1/2}/(\rho/T^3)$ voraus, so ist es möglich, daß Gaskugeln aus solchem Material einer Kontraktion zu homologer Dichteverteilung zustreben und Lanes Gesetz befolgen. Verf. gibt einen theoretischen Ausdruck für die Zeit an, die ein Stern zur Kontraktion auf seine augenblickliche Größe braucht, und findet für das Alter der Sonne $8 \cdot 10^9$ Jahre, eine Zahl, die bei einer höheren Sonnentemperatur noch zu vergrößern wäre. Für die Energie, die während dieser Zeit ausgestrahlt würde, gibt der Verf. $2,4 \cdot 10^{47}$ erg für 1 g an. Die Kontraktion war im Anfange viel kleiner, da auch die Opazität größer gewesen sein

muß, eine Änderung derselben gemäß $T^{-1}f(\varrho/T^3)$ gibt ja schon eine unendliche Zeitspanne für die Entwicklung.

Hubert Slouka (Prag).

Biermann, L.: Bemerkungen zum Aufbau der Sterne. (*Univ.-Sternwarte, Göttingen.*) *Z. Astrophys.* 2, 243—244 (1931).

Es wird eine vorläufige Mitteilung über die Resultate numerischer Integration von Sternmodellen gemacht, bei welcher kein konstanter Absorptionskoeffizient benutzt wurde, sondern das Kramersche Gesetz mit den Jeansschen Konstanten. Integriert wurde von außen nach innen, unter Beibehaltung bestimmter Randbedingungen für Dichte und Temperatur bei vorgegebener Gesamtmasse und Leuchtkraft. Die Untersuchung der Abhängigkeit der Lösung von der Leuchtkraft bei vorgegebenen Werten der Masse und des Radius führt zu zwei Typen, die mit den Milneschen übereinstimmen. Der dabei vorkommende Grenztypus, der durch Interpolation für eine mit dem Radius gegen 0 zustrebende Masse erhalten wird, ordnet sich sehr genau dem empirischen Masse-Leuchtkraft-Gesetze ein, wobei die Diskrepanz zwischen dem „stellaren“ (Eddington) und dem irdischen Absorptionskoeffizienten verschwindet. Dabei wird eine punktförmige Energiequelle vorausgesetzt, gegenüber Milne aber, der mit einem konstanten Absorptionskoeffizienten rechnet, muß man nach der Kramerschen Theorie eine starke Variation desselben längs des Radius in Betracht ziehen.

Hubert Slouka (Prag).

Woltjer jr., J.: The resistance experienced by the outward moving chromospheric Ca^+ ions and its effect on the density. (*Astron. Observ., Leiden.*) *Bull. astron. Inst. Netherlands* 6, 91—92 (1931).

The resistance to a stream of ionised calcium Ca^+ ions rising vertically through the sun's atmosphere is due to their encounters with other ions. This is calculated by the author by the ordinary methods of kinetic theory by finding the average decrease in the vertical velocity of a Ca^+ ion in an encounter. All ions are assumed to possess a charge e and to interact according to the inverse square law of force. "Encounters" are restricted to cases where the distance of one ion from the asymptotic relative velocity of the other is less than a quarter of the average distance between neighbouring ions. The resistance is therefore obtained as a function of v , the velocity of the stream, and ϱ , the atmospheric density. By taking values of v and of the radiation pressure from his previous papers, the author computes ϱ for the level at which this resistance balances the excess of radiation pressure over gravity. The value obtained is $0.2 \cdot 10^{-16}$.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Tolman, Richard C.: On thermodynamic equilibrium in a static Einstein universe. (*Norman Bridge Labor., California Inst. of Techn., Pasadena.*) *Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A.* 17, 153—160 (1931).

Die Arbeit behandelt die Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit in einem (statischen) Einsteinschen Universum Materie und Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht seien. Dabei wird angenommen, daß Materie in Strahlung und Strahlung in Materie übergehen könne. Mit dem nichtstatischen Linienelement

$$ds^2 = -e^{g(t)} \left[1 + \frac{r^2}{4R^2} \right]^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2 \quad (1)$$

erhält man aus den Feldgleichungen in der gemischten Form

$$8\pi T_1^1 = 8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 = -8\pi p_0 = \frac{1}{R^2} e^{-g} + \ddot{g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \quad (2)$$

$$8\pi T_4^4 = 8\pi \varrho_{00} = \frac{3}{R^2} e^{-g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \quad (3)$$

$$8\pi T_\varrho^\sigma = 0, \quad (\varrho \neq \sigma) \quad (4)$$

wenn die Materie isotrop ist, so daß die Spannungen in den skalaren Druck p_0 degenerieren. ϱ_{00} ist die Energiedichte, Λ die kosmologische Konstante, $\dot{g} = dg/dt$. Aus dem

Erhaltungssatz oder auch aus (2) und (3) folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\varrho_{00} e^{\frac{3\mu}{2}} \right) + p_0 \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{3\mu}{2}} \right) = 0 \quad (5)$$

mit der Abkürzung

$$e^\mu = e^{g(t)} \left[1 + \frac{r^2}{4R^2} \right]^{-2}. \quad (6)$$

$e^{\frac{3\mu}{2}} dx dy dz$ ist das dem Parallelepipedon $dx dy dz$ zugehörige Eigenvolumen. (5) bedeutet also, daß die Änderung der Energie in einem beliebigen Gebiet der Koordinaten x, y, z nur in der an die Umgebung abgegebenen Arbeit besteht. — In früheren Arbeiten [z. B. Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. **14**, 701 (1928)] hat der Verf. gezeigt, daß in der allgemeinen Relativitätstheorie der 2. Hauptsatz der Thermodynamik lautet

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\Phi_0 \sqrt{-g} \frac{dx_2}{ds} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \cong \frac{dQ_0}{T_0}, \quad (7)$$

wo Φ_0 die Eigendichte der Entropie, T_0 die Eigentemperatur und dQ_0 die in das Volumen $dx_1 dx_2 dx_3$ im Zeitelement dx_4 einströmende Wärmemenge bedeutet. (7) gibt im vorliegenden Falle [$dQ_0 = 0$; $dx_i/ds = 0$ für $i = 1, 2, 3$; Linienelement (1)]

$$\frac{d}{dt} \left(\Phi_0 e^{\frac{3\mu}{2}} \right) \cong 0. \quad (8)$$

Der Entropieinhalt eines beliebigen Volumens nimmt also nie ab. — Nun wird für das Gleichgewicht gefordert, daß

$$\Phi_0 e^{\frac{3g}{2}}$$

[äquivalent mit der gleichen Forderung für $\Phi_0 e^{\frac{3\mu}{2}}$ wegen (6)] ein Maximum werde im statischen Universum, also unter den Nebenbedingungen [$\dot{g} = \dot{\tilde{g}} = 0$ in (2) und (3)]

$$p_0 + \frac{1}{8\pi R^2} e^{-g} - \frac{A}{8\pi} = 0, \quad (9)$$

$$\varrho_{00} - \frac{3}{8\pi R^2} e^{-g} + \frac{A}{8\pi} = 0. \quad (10)$$

Bei der Anwendung dieser Forderung auf ein Universum, das mit einem einatomigen Gas in Wechselwirkung mit schwarzer Strahlung erfüllt ist, werden Φ_0 , p_0 , ϱ_{00} Funktionen von T_0 und der Atomzahl pro Volumeinheit N_0 :

$$\Phi_0 = \frac{3}{2} N_0 k \log T_0 - N_0 k \log N_0 + N_0 k \log (b c^3) + \frac{1}{3} a T_0^3. \quad (11)$$

Der 3. Term rechts ist hinzugefügt, um die Entropie des Gases und der Strahlung vom gleichen Anfangspunkt rechnen zu können. Ferner:

$$p_0 = N_0 k T_0 + \frac{1}{3} a T_0^4, \quad (12)$$

$$\varrho_{00} = N_0 m c^2 + \frac{3}{2} N_0 k T_0 + a T_0^4. \quad (13)$$

k ist die Boltzmannsche, a die Stefansche Konstante, m die Masse eines Atoms, c die Lichtgeschwindigkeit. Zur Bestimmung der 3 Unbekannten N_0 , T_0 , g erhält man dann aus der Maximumforderung die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= b T_0^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m c^2}{k T_0}}, \\ N_0 k T_0 + \frac{a}{3} T_0^4 + \frac{1}{8\pi R^2} e^{-g} - \frac{A}{8\pi} &= 0, \\ N_0 m c^2 + \frac{3}{2} N_0 k T_0 + a T_0^4 - \frac{3}{8\pi R^2} e^{-g} + \frac{A}{8\pi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, daß die Materie im Gleichgewicht sehr dünn verteilt sein muß, selbst für Massen m von der Größe des Elektrons und Temperaturen bis $4 \cdot 10^7$ Grad — wenn nicht der unbekannte Wert von b ganz enorm ist.

O. Heckmann (Göttingen).